

қосымша салмақ  $q_0 \leq \left(\frac{1}{20} \div \frac{1}{10}\right)l$ , жайпақ жіптер үшін зарыққан, ал  $q_0$  едәуір аз тербелістер амплитудасы,

(15) формулада  $\gamma_i = \sigma_i = 0$  қоюға болады. Онда шектемі орнықтылықтың шарты [4] жұмыстың нәтижелерімен үйлеседі. Айырма үнді жиілікте жіптің тербелістері орнықтылық шарт (15) ерекшеленген соңғы мүшеде таныс.

**Түйін сөздер:** бигармоникалық тербеліс, жайпақ икемді жіп, жиынтық үнді жиілік, айырма үнді жиілік, орнықтылық.

Bubnovich. E.V., Abildenova G.K.

**About stability of biharmonic fluctuations of a flexible flat thread**

**Summary:** For the solution of a question of stability of biharmonic fluctuations of a flexible flat thread at a frequency of total tone to amplitudes and phases in the decision (2) the small increments which are some functions of time were set. In compliance with Rausa-Gurvits's criterion the condition of stability of fluctuations is received. It is presented also the equation of boundary curve area of stability which coincides with the equation of a geometrical place of points in which amplitude curves for fluctuations of a thread at a frequency of total tone have vertical tangents. The conclusion that for flat threads which have much less than an arrow of pro-weight and amplitude of fluctuations, in a formula (15) it is possible to put is drawn. Then the condition of asymptotic stability will coincide with results of work [4]. The condition of stability of fluctuations of a thread at a frequency of differential tone differs (15) sign at the last member.

**Key words:** biharmonic fluctuations, flexible flat thread, frequency of total tone, frequency of differential tone, stability.

УДК 532:536.24;539.3

**Е.Т. Божанов, А.М. Ибраимкулов, С.Н. Мадалиева**

(Казахский национальный исследовательский технический университет имени К.И.Сатпаева Алматы, Республика Казахстан madaliev\_a\_s@mail.ru)

**ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ МНОГОСЛОЙНОЙ КОНСТРУКЦИИ ИЗ МАТЕРИАЛА СТЕКЛОТЕКСТОЛИТ-СТЕКЛОПЛАСТИКА ПОД ДЕЙСТВИЕМ УДАРНОГО ИМПУЛЬСА, ЛЕЖАЩЕЙ НА ОСНОВАНИИ ТИПА ПАСТЕРНАКА**

**Аннотация.** Рассмотрена многослойная конструкция с наполнителем переменными параметрами, лежащей обобщенном основании типа Пастернака. Исследована математическая модель взаимодействующих тел в зависимости изгиба срединной оси поперечного сечения контактной площади.

**Ключевые слова:** Многослойная конструкция с наполнителем переменными параметрами.

**Постановка задачи**

В качестве мишени рассмотрим многослойную конструкцию длиной  $L$ , толщиной  $h$ , внутренним радиусом  $R$  с наполнителем с переменными параметрами, лежащую на обобщенном основании типа Пастернака [1]–[3].

Пусть на поверхности конструкции действует критический импульс при упруго-вязком и пластическом деформировании площади контакта. Математическую модель взаимодействующих тел в зависимости дифференциального уравнения изгиба срединной оси поперечного сечения площади контакта возьмем в виде [1].

$$\frac{d^4 W}{dx^4} + \frac{\eta}{D} \frac{dW}{dx} + \frac{k}{D} W = \frac{q_k}{D} f(x) \tag{1}$$

$$\text{где } q_k = \lambda_k \frac{N}{Q} \gamma^2 \frac{1}{1 + \lambda'_k \gamma^2} \tag{2}$$

$\lambda_k = \left(\frac{8}{3}, 2, \frac{4}{3}\right)$ -форма поперечного сечения площади контакта ударного импульса с конструкцией,  $N, Q$ - анизотропные характеристики конструкции,  $\gamma = \frac{nh}{2L}$  - число полуволн в продольном направлении,  $\lambda'_k$ -параметры нелинейных деформационных процессов,  $\frac{R}{L}$ - характеристики толщины конструкции,  $f(x)$ - вид критической статической нагрузки в зависимости от формы поперечного сечения площади контакта.

Характеристическое уравнение однородной части дифференциального уравнения (1) представим в виде

$$\lambda^4 + \frac{\eta}{\sqrt[4]{k^3 D}} \lambda + 1 = 0 \text{ или } \lambda^4 + c\lambda + 1 = 0 \quad (3)$$

$$\text{где } c = \frac{\eta}{\sqrt[4]{k^3 D}} \quad (4)$$

Исследование корней характеристического уравнения (3) показывают, что здесь возможны три случая:

1-случай. Если  $2,0 \leq c \leq 3,0$ , то два корня отрицательные действительные и два корня комплексно-сопряженные, тогда

$$W_0(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + e^{\alpha_1 x} (c_3 \cos \beta_1 x + c_4 \sin \beta_1 x) \quad (5)$$

$$\alpha_1 = \frac{A}{2}; \quad \beta_1 = \sqrt[4]{\frac{A^2}{4} - \frac{a}{2A}},$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{A}{2} \pm \sqrt[4]{\frac{A^2}{4} - \frac{1}{2} \left( A^2 + \frac{a}{A} \right)},$$

Здесь

$$A^2 = \sqrt[3]{\frac{a^2}{2} + \sqrt{\frac{a^4}{4} - \frac{64b^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{a^2}{4} - \sqrt{\frac{a^4}{4} - \frac{64b^3}{27}}},$$

$$a = \frac{\eta}{D}, \quad b = \frac{k}{D}$$

В частности при  $2,0 \leq c \leq 3,0$ :

$$\lambda_1 = \{-1,0; -1,103; -1,249; -1,307\}$$

$$\lambda_2 = \{-0,5437; -0,4653; -0,3705; -0,3377\}$$

$$\lambda_3 = \{0,772 - 1,1114i; 0,7844 - 1,154i; 0,81 - 1,23i; 0,8226 - 1,2603i\}$$

$$\lambda_4 = \{-0,772 + 1,1114i; -0,7844 + 1,154i; -0,81 + 1,23i; -0,8226 + 1,2603i\} \quad (7)$$

Следовательно, вместо дифференциального уравнения (1) можно рассмотреть дифференциальное уравнение модели Б-3 [2]:

$$\frac{d^4 W}{dx^4} + \frac{\eta}{D} \frac{dW}{dx} = \frac{q_k}{D} f(x) \quad (8)$$

$$\text{при } \alpha_1 = \{0,772; 0,7844; 0,8098; 0,8226\}, \text{ и } \beta_1 = \{1,1151; 1,1541; 1,227; 1,2603\} \quad (9)$$

2-случай. Если  $0,5 \leq c \leq 1,75$ , то все четыре корня характеристического уравнения комплексные сопряженные.

Например:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \left\{ 0,7125 - 0,8265i; 0,7188 - 0,8818i; -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i; 0,7369 - 0,9834i; 0,7479 - 1,03i \right\}; \\ \lambda_2 &= \left\{ 0,71248 + 0,8265i; 0,7188 + 0,8818i; -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i; 0,73695 + 0,9834i; 0,7479 + 1,03i \right\}; \\ \lambda_3 &= \left\{ -0,7125 + 0,5764i; -0,7188 + 0,5058i; -0,7369 + 0,345i; 0,7479 - 1,03i \right\}; \\ \lambda_4 &= \left\{ -0,7125 - 0,5764i; -0,7188 - 0,5058i; -0,7369 - 0,345i; 0,7479 + 1,03i \right\}. \end{aligned} \quad (10)$$

Следовательно, вместо дифференциального уравнения (1) можно рассмотреть дифференциальное уравнение модели Б-2 [2]:

$$\frac{d^4 W}{dx^4} + \frac{k}{D} W = \frac{q_k}{D} f(x) \quad (11)$$

при данных (10) и  $\eta L \ll k, \frac{a}{2A} \ll \frac{A^2}{4}$  (12)

3-случай. Если  $\eta = k, \frac{q}{2A} = \frac{A^2}{4}, \frac{A^2}{4} - \frac{1}{2} \left( A^2 + \frac{a}{A} \right) = 0$ , то вместо дифференциального уравнения (1) можно рассмотреть дифференциальное уравнение [5]

$$\left[ \left( \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} + e^{2i\varphi} \right) \left( \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} + e^{-2i\varphi} \right) \right] W = \frac{d_k}{D} f(x) \quad (13)$$

Общее решение однородной части которого представляет собой

$$W_0(x) = c_1 \mathfrak{J}_0(xe^{i\varphi}) + c_2 \mathfrak{J}_0(xe^{-i\varphi}) + c_3 Y_0(xe^{i\varphi}) + c_4 Y_0(xe^{-i\varphi}) \quad (14)$$

где  $\mathfrak{J}_0$  и  $Y_0$  - функции Бесселя первого и второго рода

Таким образом, в общем случае необходимо решить следующее дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[ \varepsilon(x) \frac{d^2 w}{dx^2} \right] + 2B \frac{d^3 w}{dx^3} = q_k \quad (15)$$

где  $\varepsilon(x) = \left\{ D; \frac{D}{x}; \frac{D}{1-x}; \frac{D}{1-x+x^2} \right\}$ ,  $B$  - коэффициент континуума Коссера, намного

меньше модуля Юнга. Общее решение некоторого

$$W(x) = \int \left\{ e^{-2B \int \frac{dx}{\varepsilon(x)}} \left[ \int \frac{q_k(x^2 + C_1 x + C_2)}{\varepsilon(x)} e^{2B \int \frac{dx}{\varepsilon(x)}} dx + C_3 \right] \right\} dx + C_4 \quad (16)$$

Если  $\varepsilon(x) = \frac{D}{x}$ , то

$$\begin{aligned} W(x) &= \frac{1}{12} \left( 4x^3 - 12 \frac{D}{B} x \right) + \frac{1}{4} \left( C_1 x^2 + 2C_2 x + 4C_3 \int e^{-\frac{B}{D} x^2} dx \right) - \\ &\quad - \frac{1}{2} C_1 \int e^{-\frac{B}{D} x^2} \left( \int e^{\frac{B}{D} x^2} dx \right) dx + C_4 \end{aligned} \quad (17)$$

Общее решение (17) в первом приближении можно представить в виде

$$W(x) = \frac{1}{12} \left( 4x^3 - 12 \frac{D}{B} x \right) + \frac{1}{4} \left( x^2 - 2 \frac{B}{K} sh \beta x \right) C_1 + \frac{1}{2} C_2 x + \frac{2}{\sqrt[4]{k^3 D}} C_3 sh \beta x + C_4 \quad (18)$$

В качестве примера в частности рассмотрим выпучивание многослойной конструкции из материалов стеклотекстолит-стеклопластика, когда конструкция закреплена с левой стороны скользящая, а с правой свободно.

При этом предполагаем, что комплексная податливость материала конструкции не является на коэффициент потери массы континуума Коссера.

$$\frac{d^4 W}{dx^4} - \frac{2}{x} \frac{d^3 W}{dx^3} + \frac{2}{x^2} \frac{d^2 W}{dx^2} = q_k x$$

где

$$q_k = \lambda_k \frac{N}{Q} \gamma^2 \frac{1}{1 + \lambda_k' \gamma^2} \left( \frac{h}{R} \right)^{5/2} \quad (19)$$

Общее решение которого

$$W(x) = \frac{q_k}{D} \left( \frac{x^5}{40} + C_1 \frac{x^4}{12} + C_2 \frac{x^3}{6} + C_3 x + C_4 \right) \quad (20)$$

Граничные условия

$$W(x) /_{x=0} = 0 \quad \frac{dw}{dx} /_{x=0} = 0 \quad \frac{d^2 w}{dx^2} /_{x=L} = 0 \quad \frac{d^3 w}{dx^3} /_{x=L} = 0 \quad (21)$$

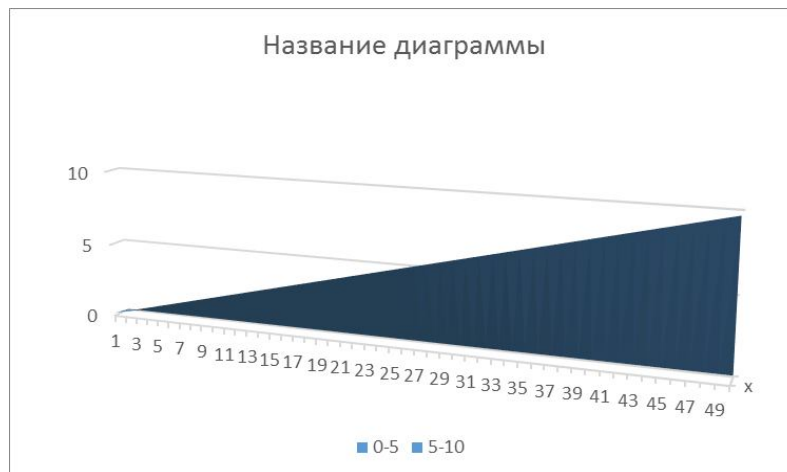
На основании (20) из граничных условия (21) получим:

$$W(x) = \frac{q_k}{120D} (3x^2 - 10Lx + 10L^2)x^3 \quad (22)$$

Формула (22) решена на ЭВМ при следующих заданиях:

Задание 1. Построить график функции в долях  $L=1, \frac{q_k}{120D} = 1,$

т.е.  $W(x) = (3x^2 - 10x + 10)x^3 \quad (23)$



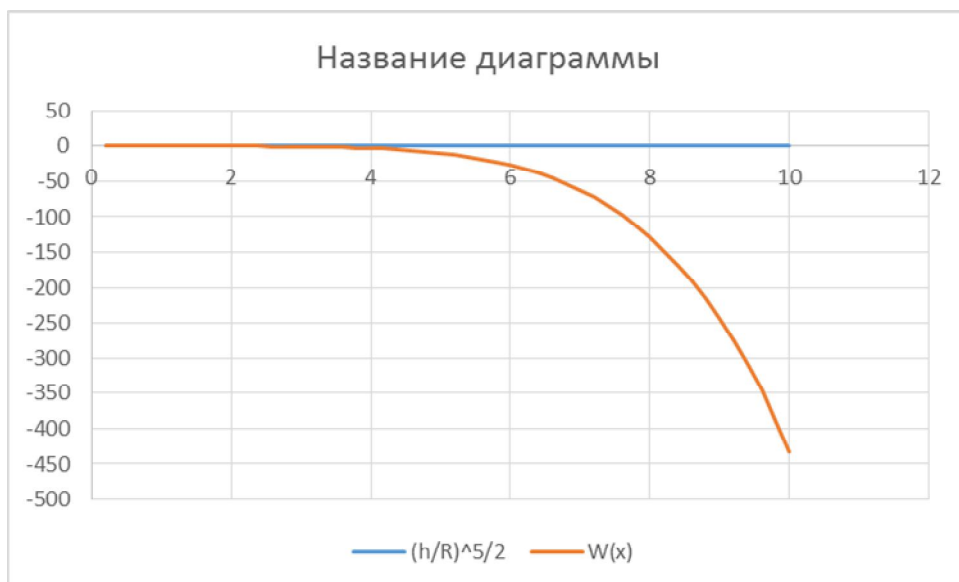
Задание 2. Построить график функции стеклотекстолита при  $0,03 \leq (h/R)^{5/2} \leq 0,06$ ,

$$\lambda_k = \frac{8}{3}, \quad \gamma^2 = 0,2, \quad \lambda'_k = 1, \quad \frac{N}{Q} = 1,13$$

, , , т.е

$$W(x) = \frac{113}{2700} (3x^5 - 10x^4 + 10x^3) \left(\frac{h}{R}\right)^{5/2}$$

(24)

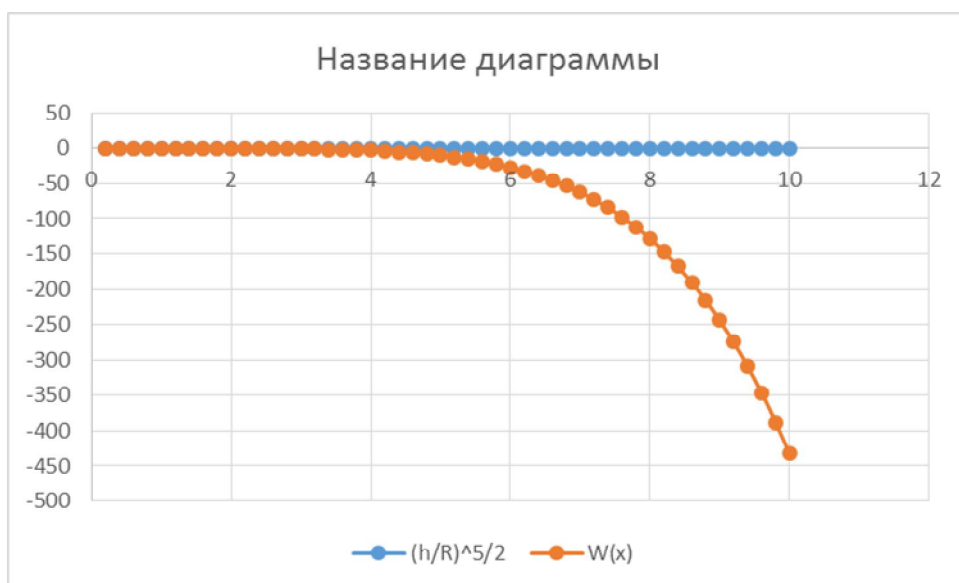


Задание 3. Построить график функции стеклопластика при

$$\lambda_k = \frac{8}{3}, \quad \gamma^2 = 0,2, \quad \lambda'_k = 1, \quad \frac{N}{Q} = 5, \quad L = 1$$

т.е.  $W(x) = \frac{1}{54} (3x^5 - 10x^4 + 10x^3) \left(\frac{h}{R}\right)^{5/2}$

(25)



Выводы:

1. В первом случае, когда  $2,0 \leq c \leq 3,0$  при решении задачи модели Б-4 можно использовать функции Томсона для характера деформации вязкой площади контакта в области упрощения

$$c = \frac{1}{\sqrt[4]{\frac{D}{k}}}$$

2. Во-втором случае, когда  $0,5 \leq c \leq 1,75$  при решении задачи модели Б-4 можно использовать функции Динника для характера деформации в области упрощения площади контакта

3. В третьем случае, когда  $c > 3$  и  $\lambda^4 + \sqrt[4]{\frac{k}{D}}\lambda + 1 = 0$ , то в функции Бесселя первого рода  $n$ -го порядка

$$\mathfrak{J}_n(x) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-1)^v}{v!(n+v)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2v}$$

можно взять при  $n=0$  десять членов, в функции Бесселя второго

рода  $n$ -го порядка

$$K_n(x) = \mathfrak{J}_n(x) \ln x + x^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$$

взять при  $n=0$  десять членов.

4. Если в третьем случае взять функцию Бесселя

$$\mathfrak{J}_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x, \quad \mathfrak{J}_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x,$$

то при  $\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{1}{2}\pi$  попадаем в область упрощения,

где  $\varphi$  угол между кривизной к кривой  $W = W(x)$  и осью  $W(x)$  по толщине  $z$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

[1] Е.Т. Божанов, Ж.С. Ержанов, Исследование проблем устойчивости упругих тел, гибких пластин и оболочек и их приложения, Алматы, 2001, 300с.

[2] А.Р. Кер, Упругие и вязкоупругие модели основания, Прикладная механика, 1964

[3] Партон В.З., Механика разрушения от теории к практике, М, Наука 1990, 239с.

[4] Божанов Е.Т., Отарбаев Ж.О., Буганова С.Н., Математическое моделирование геомеханических процессов, Алматы, 2015, 145с.

[5] С.Н. Соколов, Круглая пластинка на обобщенном упругом основании, Инженерный сборник, т.2, 1952

[6] Божанов Е.Т., Ибраимкулов А.М., Мадалиева С.Н.

Божанов Е.Т., Ибраимкулов А.М., Мадалиева С.Н.

Пастернак түрдегі негізде жататын, ұрымтал екпінді соққы әсеріндегі көпқабатты құрылым туралы

**Тұжырым.** Пастернак түрдегі негізде жататын айнымалы параметрлермен толтырылған көпқабатты құрылым қарастырылады. Байланыс ауданындағы көлденең қимасының орта осі иілуіне тәуелді өзара байланыстағы денелердің математикалық моделі зерттелді.

**Түйін сөздер:** айнымалы параметрлермен толтырылған көпқабатты құрылым.

Boshanov E.T., Ibraimkulov A.M., Madalieva S.N.

**On a model of multi - layer structure under the influence of a shock pulse, lying on the basis of the type of Pasternak**

**Summary.** We looked at a multi-layered structure with a placeholder variable parameters underlying the consolidated basis of the Pasternak type. Also we researched a mathematical model of the interacting bodies, depending on the bending of the middle axis of the cross section of the contact area.

**Key words:** multi-layered structure with a placeholder variable parameters.