З.К. Левчуктың зерттеулері ауылдық мектептердегі 4 – 6 сынып оқушыларының экономикалық тәрбиесіне арналған. Оның пікірінше экономикалық білімдер экономикалық талдау мен синтездеу тәсілдері ауыл шаруашылығындағы қоғамдық – экономикалық құбылыстардың арасындағы байланысты айқындау, олардың мән-мағынасын түсіну, үнемділіктің, экономикалық іскерліктің, тапқырлық, ынталылық, экономикалық есептегіштік, ұйымшылдық оқушылардың математикалық дайындығының дәрежесін арттыруға жағдай жасайды. Автордың пікірінше оқушыларда шаруашылықты басқарудың элементтерін қалыптастыру экономикалық тәрбиенің тиімділігін арттырудың бірден-бір жолы.

Көптеген диссертациялық жұмыстарда мына проблемалардың шешімдері қарастырылған: математикалық жаттығулар жүйесіндегі экономикалық ұғымдарды енгізудің реттілігін анықтау; оқытудың жас ерекшеліктеріне байланысты экономикалық ұғымдардың мазмұндарының анықталу дәрежесі; экономикалық мазмұндағы есептерді шешудің ерекшелік сипаттамалары; экономикалық қарапайым ұғымдар мен білімдердің қалыптасуы; оқушылардың математикалық дамуының дәрежесінің және экономикалық сауаттылықтың дәрежесінің дамуы; практикалық біліктіліктің және дағдының экономикалық мазмұндағы есептерді шешу процесіндегі даму жолдары қарастырылған.

Қорыта келе айтатынымыз, оқушылардың экономикалық дайындығын жүзеге асыру үшін мектептегі білім мазмұнының мүмкіншіліктерін айқындау мақсатында, оларды оқып білу барысында оқушыларда экономикалық білім мен біліктіліктер қалыптасатын әрбір пәннің мазмұнына талдау жасап олардың мүмкіншіліктерін анықтау қажет.

ӘДЕБИЕТТЕР

[1] Монахов В.М. Роль математики и повышении экономической грамотности школьников // Советская педагогика, 1972, № 4. – с. 28 – 31.

[2] Беляева Э.С. Система факультативных курсов «Математические методы в экономике». Автореф. дис. ... канд. пед. наук. – М., 1973 – 142 с.

[3] Гаврилова Т.П. Проблема введения элементов линейного программирования в среднюю общеобразовательную школу: Автореф. дис. ... канд. пед. наук. – М., 1970 – 182 с.

[4] Катханов К.Н. Педагогические основы производительного труда учащихся профессионально – технических училищ: Автореф. дис. ... д – ра пед. наук. – М., 1973 – 53 с.

Мусахан Т.У., Даулеткулова А.У.

Экономические знания и значение воспитания при изучений математики.

Резюме. В этой статье при изучении математики были обсужден и разработаны методы обучения для воспитания учащихся экономическим знаниям.

Ключевые слова: знания экономики, экономическое воспитание, экономическая грамотность.

Mussakhan T.U., Dauletkulova A.U.

Economic knowledge and the importance of education in the study of mathematics.

Summary. In this arcticle, in the study of mathematics was discussed and developed teaching methods for the education of students of Economic Studies.

Key words: knowledge economy, economic education, economic literacy.

УДК 517.5

Е.Ж. Айдос
(КазНИТУ имени К.И. Сатпаева,
Алматы, Республика Казахстан, erkaraai@mail.ru)

НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ В РАЗНЫХ СМЕШАННЫХ НОРМАХ

Аннотация. Получено соотношение между наилучшими приближениями в разных смешанных нормах. Оно выражено в терминах наилучших приближений полиномами, гармоники которых лежат в гиперболических крестах, соответствующих данной смешанной производной. В статье также указаны необходимые (при некоторых ограничениях) и достаточные условия для вложении типов «E в L» и «E в E».

Ключевые слова: наилучшее приближение, гиперболический крест, смешанная норма, смешанная производная.

Введение

Рассматриваемая задача берет начало от одной теоремы В.Н.Темлякова [1], где было установлено соотношение между наилучшими приближениями функций многих переменных тригонометрическими полиномами с гармониками из гиперболических крестов соответственно в метриках L_p и L_q, $1\le p\le q$. Целью данной статьи является обобщение его теоремы для случая анизотропного пространства. В этой задаче непростым оказалось нахождение взаимосвязи между компонентами векторов $\mathbf{p}=\left(p_1,p_2,...,p_d\right)$ и $\mathbf{q}=\left(q_1,q_2,...,q_d\right)$, $1<p_i<q_i<+\infty$. В связи с этим в 1991 г. данная задача была решена автором с некоторыми ограничениями на $\mathbf{p}=\left(p_1,p_2,...,p_d\right)$ и $\mathbf{q}=\left(q_1,q_2,...,q_d\right)$, $1<p_i<q_i<+\infty$. Здесь мы снимаем эти ограничения, т.е. обобщение теоремы В.Н.Темлякова получено без каких-либо ограничении. Вместе с тем, с помощью доказанных здесь теорем вложении типов «E в L» и «E в E», показана неулучшаемость полученной нами основной теоремы при условии $\max\limits_j\left(\frac{1}{p_j}-\frac{1}{q_j}\right)=\frac{1}{p_{j_0}}-\frac{1}{q_{j_0}}$, $\min\limits_j q_j=q_{j_o}$ и $\mathbf{r}=\mathbf{0}$. Поскольку в теореме В.Н.Темлякова первые из этих условии выполняются автоматически, то можно утверждать, что при $\mathbf{r}=\mathbf{0}$ неравенство, установленное им, между наилучшими приближениями функций многих переменных тригонометрическими полиномами с гармониками из гиперболических крестов соответственно в метриках L_p и L_q, $1\le p\le q$, также неусиляемо.

Необходимые обозначения и вспомогательные утверждения

Поскольку тематика по приближении полиномами, гармоники которых лежат в гиперболических крестах, широко освещена в трудах современных математиков (см. напр., [1]), то мы ограничимся приведением понятии и обозначении, непосредственно связанные с основным вопросом данной статьи.

$L_{\mathbf{p}}^{(\mathbf{r})}\left(\pi_d\right)$ - означает класс функции $f\left(\mathbf{x}\right)$, где $f^{(\mathbf{r})}\left(\mathbf{x},\boldsymbol{\alpha}\right)\in L_{\mathbf{p}}\left(\pi_d\right)$, $\mathbf{r}\ge\mathbf{0}$.

Если $\lambda=\left\{\lambda_n\right\}_{n=1}^{\infty}-$ некоторая последовательность положительных чисел, $\lambda_n\downarrow 0$ $\left(n\uparrow\infty\right)$, то через $E_{\mathbf{p},Q}^{(\mathbf{r})}(\lambda)$, $\mathbf{r}\ge\mathbf{0}$, обозначим класс функций $f\left(\mathbf{x}\right)\in L_{\mathbf{p}}^{(\mathbf{r})}\left(\pi_d\right)$, для которых выполняется $\mathrm{E}_{Q_n^{\mathbf{r}}}\left(f^{(\mathbf{r})}\left(\mathbf{x},\boldsymbol{\alpha}\right)\right)_{\mathbf{p}}=\underset{=}{0}\left(\lambda_n\right)\left(n\to\infty\right)$, где $\mathrm{E}_{Q_n^{\mathbf{r}}}\left(f\right)_{\mathbf{p}}=\inf\limits_{t\in T\left(Q_n^{\mathbf{r}}\right)}\left\|f-t\right\|_{\mathbf{p}}$, $1\le p_i<\infty$, $i=1,...,d$, - наилучшее приближение в метрике $L_{\mathbf{p}}(\pi_d)$ функции $f\left(\mathbf{x}\right)$ тригонометрическими полиномами с гармониками из гиперболического креста.

При положительном A и любом B запись $B\underset{\alpha,\beta,...}{<<}A$ будет означать $\left|B\right|\le C\left(\alpha,\beta,...\right)A$, а запись $A\underset{\alpha,\beta,...}{\succ\prec}B$ означает $A\underset{\alpha,\beta,...}{<<}B\underset{\alpha,\beta,...}{<<}A$.

Приведем утверждения, которые необходимы для доказательства теорем.

Лемма 1. Пусть $\mathbf{p}=\left(p_1,...,p_d\right)$, $\mathbf{q}=\left(q_1,...,q_d\right)$, $1<p_i<q_i<\infty$, $i=1,...,d$. Тогда имеет место неравенство

$$\left\|\sum_{n=0}^{\infty}f_{n,\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{x})\right\|_{\mathbf{q}}\le C\left(\mathbf{p},\mathbf{q},d\right)\left[\sum_{n=0}^{\infty}2^{n\left(\min\limits_{1\le j\le d}q_i\right)\max\limits_{1\le j\le d}\left(\frac{1}{p_j}-\frac{1}{q_j}\right)}\left\|f_{n,\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{x})\right\|_{\mathbf{p}}^{\min\limits_{1\le j\le d}q_i}\right]^{\frac{1}{\min\limits_{1\le j\le d}q_i}},$$

где $f_{n,\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{x})\in T\left(Q_n^{\mathbf{r}}\right)$, $n=0,1,2,...$ и $\mathbf{r}=r\,\boldsymbol{\gamma}$, $r=\min\limits_{i=1,...,d}r_i$.

Когда существует единственный $\max\limits_{i=1,2,...,d}\left(\frac{1}{p_i}-\frac{1}{q_i}\right)$, лемма1 доказана автором [2], а в общем случае, в некоторых других обозначениях - К.М. Сулейменовым ([3], гл.II, лемма 7).

Лемма 2 [4] . Пусть $\mathbf{p}=(p_1,...,p_d)$, $1<p_i<\infty$, $i=1,...,d$; $\mathbf{r}=(r_1,...,r_d)$, $0<r_i<\infty$, $i=1,...,d$; $\mathbf{r}=r\,\boldsymbol{\gamma}$, $r=\min\limits_{i=1,...,d} r_i$. Тогда для произвольных $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,...,\alpha_d)$ имеет место неравенство $\sup\limits_{t\in T(N,\gamma)}\frac{\left\|t^{(r\gamma)}(\mathbf{x},\boldsymbol{\alpha})\right\|_{\mathbf{p}}}{\left\|t(\mathbf{x})\right\|_{\mathbf{p}}}\underset{\mathbf{p},M}{<<}N^r$.

Лемма 3 [5]. Пусть $1\le p<q<\infty$ и $\{\lambda_n\}$ последовательность положительных чисел с $\lambda_n\downarrow 0$. Тогда при $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{\frac{q}{p}-2}\lambda_n^q=+\infty$ найдется функция одной переменной $\tilde{f}(x)\in E_p(\lambda)$ и $\tilde{f}(x)\notin L_q(\pi)$.

Следующая лемма является приспособлением результата, полученного В.И.Колядой ([5]) к нужному нам случаю, когда утверждение $f\notin E_q(\mu)$ имеет специальный вид $E_{2^n}(f)_q\ne O(\mu_{2^n})$. Здесь $E_k(f)_r$ - наилучшее приближение (в L_r) 2π-периодической функции $f\in L_r(\pi)$ тригонометрическими полиномами порядка не выше k.

Пусть даны положительные последовательности $\{\bar{\lambda}_k\}$ и $\{\bar{\mu}_k\}$, монотонно стремящиеся к нулю. Положим ([5]) $\nu_0=0$, $\nu_{m+1}=\min\left(k:\ \bar{\lambda}_{2^k}\le\frac{1}{2}\bar{\lambda}_{2^{\nu_m}}\right)$, $m=0,1,2,...$ Тогда, очевидно, имеют места неравенства:

$$\bar{\lambda}_{2^{\nu_{m+1}}}\le\frac{1}{2}\bar{\lambda}_{2^{\nu_m}},\qquad \bar{\lambda}_{2^{\nu_{m+1}-1}}>\frac{1}{2}\bar{\lambda}_{2^{\nu_m}}. \tag{1}$$

Теперь сформулируем саму лемму.

Лемма 4 ([5]). Пусть $1\le p<q<\infty$, $\bar{\lambda}=\{\bar{\lambda}_{2^n}\}$ и $\bar{\mu}=\{\bar{\mu}_{2^n}\}$ - последовательности положительных чисел с $\bar{\lambda}_{2^n}\downarrow 0$ и $\bar{\mu}_{2^n}\downarrow 0$. Тогда при

$$\left(2^{\nu_{m+1}}-2^n\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\bar{\lambda}_{2^n}+\left[\sum_{j=m+1}^{\infty}\left(2^{\nu_{j+1}}-2^{\nu_j}\right)^{\frac{q}{p}-1}\bar{\lambda}_{2^{\nu_j}}^q\right]^{\frac{1}{q}}\ne\underset{=}{O}\left(\bar{\mu}_{2^n}\right),\ \nu_m\le n<\nu_{m+1},$$

существует функция $f(x)$ такая, что для любого n

$E_{2^n}(f)_p\le\bar{\lambda}_{2^n}$ и $E_{2^n}(f)_q\ne\underset{=}{O}\left(\bar{\mu}_{2^n}\right)$.

Лемма 5 ([4]). Пусть $1<p_i<\infty$, $i=1,...,d$, $f(x)\in L_{\mathbf{p}}(\pi_d)$ и $S_l^{\boldsymbol{\gamma}}(f)=\sum\limits_{(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{s})\le l+1}\delta_{\mathbf{s}}(f,\mathbf{x})$. Тогда справедливо неравенство $\left\|S_l^{\boldsymbol{\gamma}}(f)\right\|_{\mathbf{p}}\underset{\mathbf{p}}{<<}\left\|f\right\|_{\mathbf{p}}$.

Лемма 6. При $1<p_i<\infty$, $i=1,...,d$, справедливы соотношения

$$E_{Q_n^{\mathbf{r}}}(f)_{\mathbf{p}}\succ\prec\left\|f-S_{n-1}^{\boldsymbol{\gamma}}(f)\right\|_{\mathbf{p}}.$$

Доказательство. Прямая оценка следует непосредственно из определения наилучшего приближения.

Пусть теперь $t(\mathbf{x}) \in T(Q_n^{\mathbf{r}})$ - полином наилучшего приближения (в $L_{\mathbf{p}}(\pi_d)$) функции f. В силу леммы 5 получаем

$$\left\|f - S_{n-1}^{\gamma}(f)\right\|_{\mathbf{p}} \leq \left\|f - t\right\|_{\mathbf{p}} + \left\|S_{n-1}^{\gamma}(f) - t\right\|_{\mathbf{p}} = \left\|f - t\right\|_{\mathbf{p}} + \left\|S_{n-1}^{\gamma}(f) - S_{n-1}^{\gamma}(t)\right\|_{\mathbf{p}} =$$
$$= \left\|f - t\right\|_{\mathbf{p}} + \left\|S_{n-1}^{\gamma}(f - t)\right\|_{\mathbf{p}} << \left\|f - t\right\|_{\mathbf{p}} + \left\|f - t\right\|_{\mathbf{p}} << \left\|f - t\right\|_{\mathbf{p}} = E_{Q_n^{\mathbf{r}}}(f)_{\mathbf{p}}.$$

Лемма 6 доказана.

Лемма 7 (см.[6]). Пусть $\mathbf{p} = (p_1, ..., p_d)$, $\mathbf{q} = (q_1, ..., q_d)$, $1 < p_i < q_1 < \infty$, $i = 1, ..., d$, $\mathbf{r} = (r_1, ..., r_d)$, $\min\limits_i r_i \geq 0$. Тогда, если 2π периодическая по каждой из d переменных функция $f(\mathbf{x})$ принадлежит лебеговскому классу $L_{\mathbf{p}}(\pi_d)$ и

$$\sum_{l=1}^{\infty} 2^{l(\min\limits_{1\leq i\leq d} q_i)\left[\max\limits_{1\leq j\leq d}\left(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j}\right) + \min\limits_{1\leq i\leq d} r_i\right]} E_{Q_l^{\mathbf{r}}}^{\min\limits_{1\leq i\leq d} q_i}(f)_{\mathbf{p}} < \infty, \tag{1}$$

то функция $f(\mathbf{x})$ имеет $(\mathbf{r}, \boldsymbol{\alpha})$ производную, принадлежащую $L_{\mathbf{q}}(\pi_d)$ и справедливо неравенство

$$E_{Q_n^{\mathbf{r}}}\left[f^{(\mathbf{r})}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha})\right]_{\mathbf{q}} \underset{\mathbf{p},\mathbf{q},\mathbf{r}}{<<} \left[\sum_{l=n}^{\infty} 2^{l(\min\limits_{1\leq i\leq d} q_i)\left[\max\limits_{1\leq j\leq d}\left(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j}\right) + \min\limits_{1\leq i\leq d} r_i\right]} E_{Q_l^{\mathbf{r}}}^{\min\limits_{1\leq i\leq d} q_i}(f)_{\mathbf{p}}\right]^{\frac{1}{\min\limits_{1\leq i\leq d} q_i}}. \tag{2}$$

Как было отмечено во введении, при $p_i = p$, $q_i = q$, $i = 1, 2, ...d$, неравенства (2) совпадает с неравенством, доказанным В.Н.Темляковым ([1], теорема 2.3).

Основные результаты

Теорема1. Пусть $\mathbf{p} = (p_1, ..., p_d)$, $\mathbf{q} = (q_1, ..., q_d)$, $1 < p_i < q_i < \infty$, $i = 1, ..., d$; $\mathbf{r} = (r_1, ..., r_d)$, $\min\limits_i r_i \geq 0$ и $\{\lambda_l\}$ - последовательность положительных чисел с $\lambda_l \downarrow 0$. Тогда для того чтобы имело место вложение ($\mathbf{r} \geq \mathbf{0}$)

$$E_{\mathbf{p},Q}(\lambda) \subset L_{\mathbf{q}}^{(\mathbf{r})}(\pi_d), \tag{3}$$

достаточно выполнение

$$\sum_{l=1}^{\infty} 2^{l\left(\min\limits_{1\leq i\leq d} q_i\right)\left[\max\limits_{1\leq j\leq d}\left(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j}\right) + \min\limits_{1\leq i\leq d} r_i\right]} \lambda_l^{\min\limits_{1\leq i\leq d} q_i} < \infty, \tag{4}$$

а, при $\max\limits_j\left(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j}\right) = \frac{1}{p_{j_0}} - \frac{1}{q_{j_0}}$, $\min\limits_j q_j = q_{j_o}$ и $\mathbf{r} = \mathbf{0}$, условие (4) необходимо для вложения (3).

Доказательство. Достаточность следует из леммы 7.

Необходимость. Для удобства в равенствах $\max\limits_j\left(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j}\right) = \frac{1}{p_{j_0}} - \frac{1}{q_{j_0}}$ и $\min\limits_j q_j = q_{j_o}$, обозначим $q_{j_o} = q_0$ и $p_{j_o} = p_0$. Тогда при $\mathbf{r} = \mathbf{0}$, условие (4) запишется в виде:

$$\sum_{l=1}^{\infty} 2^{lq_0\left(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{q_0}\right)} \lambda_l^{q_0} = \sum_{l=1}^{\infty} 2^{l\left(\frac{q_0}{p_0}-1\right)} \lambda_l^{q_0} < \infty. \qquad (5)$$

Далее, пусть имеет место вложение $E_{\mathbf{p},Q}(\lambda) \subset L_{\mathbf{q}}(\pi_d)$, но условие (5) не выполнено, т.е.

$$\sum_{l=1}^{\infty} 2^{l\left(\frac{q_0}{p_0}-1\right)} \lambda_l^{q_0} = \infty. \qquad (6)$$

Последовательность $\left\{\overline{\lambda}_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ определим следующим образом: для $n = 2^{l-1}+1, \ldots, 2^l$, $l = 1, 2, \ldots$ положим $\overline{\lambda}_n = \lambda_l$. Тогда из условия (6) следует, что

$$\sum_{n=2}^{\infty} n^{\frac{q_0}{p_0}-2} \overline{\lambda}_n^{q_0} = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{n=2^{l-1}+1}^{2^l} n^{\frac{q_0}{p_0}-2} \overline{\lambda}_n^{q_0} >> \sum_{l=1}^{\infty} 2^{l\left(\frac{q_0}{p_0}-1\right)} \lambda_l^{q_0} = \infty.$$

По лемме 3, существует 2π -периодическая функция $\tilde{f}\left(x_{j_0}\right)$, $1 \le j_0 \le d$, такая, что:

$$\text{а)}\, E_n\left(\tilde{f}\right)_{p_{j_o}} \le \overline{\lambda}_n, \quad \text{б)}\ \tilde{f} \notin L_{q_{j_0}}(\pi). \qquad (7)$$

Положим $f(\mathbf{x}) = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_d\right) = \tilde{f}\left(x_{j_0}\right)$. Тогда в силу (7) а) имеем ($\tilde{T}_{2^l}\left(x_{j_0}\right)$ - наилучший элемент приближения функции $\tilde{f}\left(x_{j_0}\right)$ в $L_{p_{j_0}}(\pi)$ тригонометрическими полиномами порядка не выше 2^l **),**

$$\lambda_l = \overline{\lambda}_{2^l} \ge E_{2^l}\left(\tilde{f}\right)_{p_{j_o}} = \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left|\tilde{f}\left(x_{j_0}\right) - \tilde{T}\left(x_{j_0}\right)\right|^{p_{j_o}} dx_{j_0}\right)^{\frac{1}{p_{j_o}}} = (2\pi)^{-\sum\limits_{k\ne j_0}\frac{1}{p_k}} \left\|\tilde{f} - \tilde{T}\right\|_{\mathbf{p}} \ge$$

$$\ge (2\pi)^{-\sum\limits_{k\ne j_0}\frac{1}{p_k}} E_{Q_l}(f)_{\mathbf{p}}, \quad \text{т.е. } f(\mathbf{x}) \in E_{\mathbf{p},Q}(\lambda).$$

Но, в силу (7) б), имеет место $\|f\|_{\mathbf{q}} = (2\pi)^{\sum\limits_{k\ne j_0}\frac{1}{q_k}} \left\|\tilde{f}\right\|_{L_{q_{j_0}}(\pi)} = +\infty$, т.е. данная функция не принадлежит в $L_{\mathbf{q}}(\pi_d)$. Пришли к противоречию, тем самым доказана необходимая часть теоремы.

Теорема 1 доказана.

Из теоремы 1 вытекают следующие утверждения.

Следствие 1. Пусть $\mathbf{p} = \left(p_1, \ldots, p_d\right)$, $\mathbf{q} = (q\ , \ldots, q\ )$, $1 < p_i < q\ < \infty$, $i = 1, \ldots, d$ и $\{\lambda_l\}$ - последовательность положительных чисел с $\lambda_l \downarrow 0$.

Тогда для того чтобы имело место вложение $E_{\mathbf{p},Q}(\lambda) \subset L_q(\pi_d)$,

необходимо и достаточно выполнения условия $\displaystyle\sum_{l=1}^{\infty} 2^{l \max\limits_{j=1,2,\ldots,d}\left(\frac{q}{p_j}-1\right)} \lambda_l^q < \infty.$

Следствие 2. Пусть $\mathbf{p} = (p\ , \ldots, p\ )$, $\mathbf{q} = (q\ , \ldots, q\ )$, $1 < p\ < q\ < \infty$, $i = 1, \ldots, d$

и $\{\lambda_l\}$ - последовательность положительных чисел с $\lambda_l \downarrow 0$.

Тогда для того чтобы имело место вложение $E_{p,Q}(\lambda) \subset L_q(\pi_d)$,

необходимо и достаточно выполнение условия $\displaystyle\sum_{l=1}^{\infty} 2^{l\left(\frac{q}{p}-1\right)} \lambda_l^q < \infty.$

Теорема 2. Пусть $\mathbf{p}=(p_1,...,p_d)$, $\mathbf{q}=(q_1,...,q_d)$, $1<p_i<q_i<\infty$, $i=1,...,d$; $\mathbf{r}=(r_1,...,r_d)$, $\min\limits_i r_i\ge 0$; $\{\lambda_l\}$ и $\{\mu_l\}$ – последовательности положительных чисел, $\lambda_l\downarrow 0$ и $\mu_l\downarrow 0$ ($l\uparrow\infty$). Тогда для вложения ($\mathbf{r}\ge\mathbf{0}$)

$$E_{\mathbf{p},Q}(\lambda)\subset E_{\mathbf{q},Q}^{(\mathbf{r})}(\mu), \qquad (8)$$

достаточно, а при $\max\limits_j\left(\frac{1}{p_j}-\frac{1}{q_j}\right)=\frac{1}{p_{j_0}}-\frac{1}{q_{j_0}}$, $\min\limits_j q_j=q_{j_o}$ и $\mathbf{r}=\mathbf{0}$ необходимо, чтобы выполнялось

$$\left[\sum_{l=n}^{\infty}2^{l\left(\min\limits_{1\le i\le d}q_i\right)\left[\max\limits_{1\le j\le d}\left(\frac{1}{p_j}-\frac{1}{q_j}\right)+\min\limits_{1\le i\le d}r_i\right]}\lambda_l^{\min\limits_{1\le i\le d}q_i}\right]^{\frac{1}{\min\limits_{1\le i\le d}q_i}}=\underset{=}{O}(\mu_n). \qquad (9)$$

Доказательство. Достаточность следует из неравенства (2).

Необходимость. При $\max\limits_j\left(\frac{1}{p_j}-\frac{1}{q_j}\right)=\frac{1}{p_{j_0}}-\frac{1}{q_{j_0}}$, $\min\limits_j q_j=q_{j_o}$ и $\mathbf{r}=\mathbf{0}$ условие (9) запишется в виде (для упрощения записи положим $q_{j_o}=q_0$, $p_{j_o}=p_0$):

$$\left[\sum_{l=n}^{\infty}2^{l\left(\frac{q_{j_0}}{p_{j_0}}-1\right)}\lambda_l^{q_{j_0}}\right]^{\frac{1}{q_{j_0}}}=\underset{=}{O}(\mu_n). \qquad (9')$$

Итак, пусть имеет место вложение (8) при $\mathbf{r}=\mathbf{0}$, т.е. $E_{\mathbf{p},Q}(\lambda)\subset E_{\mathbf{q},Q}(\mu)$, но условие (9′) не выполнено.

Положим $\overline{\lambda}_n=\lambda_l$, и $\overline{\mu}_n=\mu_l$, при $2^{l-1}<n\le 2^l$, $l=1,2,...$ В силу соотношения $\overline{\lambda}_{2^{\nu_{k+1}}}\le\frac{1}{2}\overline{\lambda}_{2^{\nu_k}}$ (см. (1) п.1) имеет место неравенство $\nu_{k+1}\ge\nu_k+1$, поэтому $2^{\nu_{k+1}}-2^{\nu_k}=2^{\nu_{k+1}}\left(1-\frac{1}{2^{\nu_{k+1}-\nu_k}}\right)\ge 2^{\nu_{k+1}}\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot 2^{\nu_{k+1}}$, откуда

$$\left(2^{\nu_{k+1}}-2^{\nu_k}\right)^{\frac{q_{j_o}}{p_{j_o}}-1}\ge\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{q_{j_o}}{p_{j_o}}-1}\cdot\left(2^{\nu_{k+1}}\right)^{\frac{q_{j_o}}{p_{j_o}}-1}\ge\sum_{l=1}^{\nu_{k+1}}2^{l\left(\frac{q_{j_o}}{p_{j_o}}-1\right)}.$$

Учитывая это неравенство и предположение о том, что $(9')$ не выполнено, имеем

$$\overline{\lambda}_{2^n}\left(2^{\nu_{k+1}}-2^n\right)^{\frac{1}{p_{j_o}}-\frac{1}{q_{j_o}}}+\left[\sum_{j=m+1}^{\infty}\left(2^{\nu_{k+1}}-2^{\nu_k}\right)^{\frac{q_{j_o}}{p_{j_o}}-1}\overline{\lambda}_{2^{\nu_j}}^{q_{j_o}}\right]^{\frac{1}{q_{j_o}}}\gg$$

$$\gg\overline{\lambda}_{2^n}\left[\sum_{l=n}^{\nu_{k+1}-1}2^{l\left(\frac{q_{j_o}}{p_{j_o}}-1\right)}\right]^{\frac{1}{q_{j_o}}}+\left[\sum_{j=m+1}^{\infty}\sum_{l=\nu_j}^{\nu_{j+1}-1}2^{l\left(\frac{q_{j_o}}{p_{j_o}}-1\right)}\overline{\lambda}_{2^l}^{q_{j_o}}\right]^{\frac{1}{q_{j_o}}}\gg$$

$$>> \left[\sum_{l=n}^{v_{k+1}-1} 2^{l\left(\frac{q_{j_o}}{p_{j_o}}-1\right)} \overline{\lambda}_{2^l}^{q_{j_o}}\right]^{\frac{1}{q_{j_o}}} + \left[\sum_{l=v_{m+1}}^{\infty} 2^{l\left(\frac{q_{j_o}}{p_{j_o}}-1\right)} \overline{\lambda}_{2^l}^{q_{j_o}}\right]^{\frac{1}{q_{j_o}}} >>$$

$$>> \left[\sum_{l=n}^{\infty} 2^{l\left(\frac{q_{j_o}}{p_{j_o}}-1\right)} \overline{\lambda}_{2^l}^{q_{j_o}}\right]^{\frac{1}{q_{j_o}}} = \left[\sum_{l=n}^{\infty} 2^{l\left(\frac{q_{j_o}}{p_{j_o}}-1\right)} \lambda_l^{q_{j_o}}\right]^{\frac{1}{q_{j_o}}} \neq \underset{=}{O}\left(\mu_n\right) = \underset{=}{O}\left(\overline{\mu}_{2^n}\right),$$

т.е. выполняется условие леммы (4). Поэтому, существует функция одной переменной $\tilde{f}\left(x_{j_o}\right)$ такая, что $E_{2^n}\left(\tilde{f}\right)_{L_{p_o}(\pi)} \le \overline{\lambda}_{2^n}$ для любого n и $E_{2^n}\left(\tilde{f}\right)_{L_{q_o}(\pi)} \neq \underset{=}{O}\left(\overline{\mu}_{2^n}\right)$.

Пусть $f\left(\mathbf{x}\right) = \tilde{f}\left(x_{j_o}\right)$ и $\tilde{T}_{2^n}$ – полином наилучшего приближения функции $\tilde{f}\left(x_{j_o}\right)$ в метрике $L_{p_o}\left(\pi\right)$, $1 \le p_o < \infty$. Имеем

$$\mathrm{E}_{Q_n}\left(f\right)_{\mathbf{p}} << \left\|f - \tilde{T}_{2^n}\left(x_{j_o}\right)\right\|_{\mathbf{p}} = \left(2\pi\right)^{\sum_{i\neq j_o}\frac{1}{p_i}} \left\|\tilde{f}\left(x_{j_o}\right) - \tilde{T}_{2^n}\left(x_{j_o}\right)\right\|_{L_{p0}(\pi)} =$$

$$= E_{2^n}\left(\tilde{f}\right)_{L_{p_o}(\pi)} \le \overline{\lambda}_{2^n} = \lambda_n, \text{ т.е. } f \in E_{\mathbf{p},d,Q}(\lambda).$$

С другой стороны, в силу леммы 6 получим ($S_{Q_n}\left(f, \mathbf{x}\right)$ - частные суммы ряда Фурье функции $f\left(\mathbf{x}\right)$ с гармониками из Q_n, а $S_{2^n}\left(\tilde{f}, x_{j_o}\right)$ - частные суммы ряда Фурье функции $\tilde{f}\left(x_{j_o}\right)$ порядка 2^n)

$$\mathrm{E}_{Q_n}\left(f\right)_{\mathbf{q}} >> \left\|f - S_{Q_n}\left(f, \mathbf{x}\right)\right\|_{\mathbf{q}} = \left(2\pi\right)^{\sum_{i\neq j_o}\frac{1}{q_i}} \left\|\tilde{f}\left(x_{j_o}\right) - S_{2^n}\left(\tilde{f}, x_{j_o}\right)\right\|_{L_{q_o}(\pi)} >>$$

$$>> E_{2^n}\left(\tilde{f}\right)_{L_{q_o}(\pi)} \neq \underset{=}{O}\left(\overline{\mu}_{2^n}\right) = \underset{=}{O}\left(\mu_n\right), \text{ т.е. } f(\mathbf{x}) \notin E_{\mathbf{q},Q}(\mu).$$

Теорема 2 доказана.

Из теоремы 2 вытекают следующие утверждения.

Следствие 1. Пусть $\mathbf{p} = \left(p\ ,..., p\ \right)$, $\mathbf{q} = \left(q\ ,..., q\ \right)$, $1 < p\ < q\ < \infty$, $i = 1,...,d$ и $\left\{\lambda_l\right\}$ - последовательность положительных чисел с $\lambda_l \downarrow 0$. Тогда для того чтобы имело место вложение $E_{p,Q}(\lambda) \subset E_{q,Q}(\mu)$, необходимо и достаточно выполнение условия

$$\left[\sum_{l=n}^{\infty} 2^{l\left(\frac{q}{p}-1\right)} \lambda_l^q\right]^{\frac{1}{q}} = \underset{=}{O}\left(\mu_n\right).$$

Следствие 2. Пусть $\mathbf{p} = \left(p_1,..., p_d\right)$, $q = \left(q,...,q\right)$, $1 < p_i < q < \infty$, $i = 1,...,d$ и $\left\{\lambda_l\right\}$ - последовательность положительных чисел с $\lambda_l \downarrow 0$. Тогда для того чтобы имело место вложение $E_{\mathbf{p},Q}(\lambda) \subset E_{q,Q}(\mu)$, необходимо и достаточно выполнения условия

$$\left[\sum_{l=n}^{\infty} 2^{l\max\limits_{1\le j\le d}\left(\frac{q}{p_j}-1\right)} \lambda_l^q\right]^{\frac{1}{q}} = \underset{=}{O}\left(\mu_n\right).$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] В.Н.Темляков, «Приближение функций с ограниченой смешанной производной», Труды МИАН СССР, 1986, т.178, 3-112.

[2] Е.Ж. Айдосов, «О вложении классов функций многих переменных с заданной мажорантой наилучших приближений», Дисс. ... канд. физ.-мат. наук, Алматы 1992

[3] К.М.Сулейменов, «О вложении анизотропного пространства типа Никольского-Бесова $B^{\omega}_{p,\theta}\left(R^n\right)$ в смешанной норме», Вестник ЕНУ им. Л.Н.Гумилева, 2011, № 6.

[4] Raushan Kadyrova, Erkara Zh. Aidos, Inequality of Bernstein type for polynomials of hyperbolic crosses in a mixed norm, International Journal of Advanced Research (2013), Volume 1, Issue 9, 494-498.

[5] В.И. Коляда, «Теоремы вложения и неравенства разных метрик для наилучших приближений», Математический сборник,102, №2, 1977, 195-215.

[6] Aidos E.Zh. «About the relations between best approximations in different mixed norms» SEOUL ICM 2014 International Congress of Mathematicians, to be held from August 13-21, 2014 in Seoul, Korea 2 p.

Айдос Е.Ж.

Функциялар класстарының әртүрлі аралас нормалардағы кейбір енгізу теоремалары

Резюме. Мақалада әртүрлі нормаларда ең жақсы жуықтаулар арасындағы қатыс алынған. Ол, гармоникалары, берілген аралас туындыларға сәйкес гиперболалық кресттерде жататын полиномдардың ең жақсы жуықтаулары бойынша өрнектелген. Сонымен бірге мақалада «E-нің L -ге» және «E-нің E-ге» түріндегі енгізу теоремаларының жеткілікті және кейбір шектеулер қойылған жағдайдағы қажетті шарттары көрсетілген.

Aydos E.Zh.

Some embedding theorems for classes of functions in different mixed norms

Summary. In this paper the relation between best approximations in different mixed norms. It is expressed in terms of the best approximations by polynomials whose harmonics lie in hyperbolic crosses, corresponding to a given mixed derivative. The article also identifies the necessary (with some restrictions) and sufficient conditions for the embedding type "E in L" and "E in E".

Key words: best fit, hyperbolic cross, mixed norm, mixed derivative.

УДК 624.074.4.012.45

Э.В.Б убнович, Г.К. Абилденова

(Казахский национальный технический университет имени К.И.Сатпаева,
Алматы, Республика Казахстан, a.gulnar_91@mail.ru)

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ БИГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ ГИБКОЙ ПОЛОГОЙ НИТИ

Аннотация: Исследуются вопросы устойчивости нелинейных бигармонических колебаний гибкой нити с неподвижными опорами, расположенными на одном уровне. Условие устойчивости колебаний нити на частоте суммарного тона получено в соответствии с критерием Рауса-Гурвица.

Ключевые слова: бигармонические колебания, гибкая пологая нить, частота суммарного тона, частота разностного тона, устойчивость.

Интегро-дифференциальное уравнение колебаний нити приводится к виду [1]

$$\ddot{q}_i + \dot{q}_i + \alpha_i q_i + \lambda_i q_i^2 + \beta_i q_i^3 - \sigma_i q_i^4 - \gamma_i q_i^5 = R_{i1}\sin(\omega_1 t + \varphi_1) + R_{i2}\sin(\omega_2 t + \varphi_2),$$

(1) $(i = 1,3,5,...),$

где $q_i(t)$ - обобщенная координата; λ_i, β_i, σ_i, γ_i, æ – малые коэффициенты, зависящие от параметров нити и коэффициента демпфирования.

Найдем условия, при которых нить будет совершать колебания с частотой суммарного тона $\Omega = \omega_1 + \omega_2$.