

УДК 539.3+532.546+660.47

**Е.Т. Божанов, А.М. Ибраимкулов, А.Н. Дадаева, Ж.Н. Сейткулова**  
(Казахский национальный исследовательский технический университет имени К.И.Сатпаева,  
Алматы, Республика Казахстан, [dady1262@mail.ru](mailto:dady1262@mail.ru))

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПОРОШКОВОЙ ФОРМОВКИ  
ТРУБЧАТОЙ РЕШЕТКИ С ПЛАВАЮЩЕЙ МАТРИЦЕЙ  
ПРИ ДВУХСТОРОННЕМ ПРЕССОВАНИИ**

**Аннотация.** Рассматриваются различные математические модели трубчатой решетки с «плавающей» матрицей. Проведен системный анализ изгиба верхнего и нижнего вложенного слоя пуансона в условиях двустороннего прессования. Полученные решения дают возможность оценить надежность конструкционного материала, а также изделия из трубчатых конструкции с различными наполнителями (порошковых сплавов).

На рисунках показано искажение формы прессовки (наполнителя) при различных нагрузках.

**Ключевые слова:** трубчатая решетка, плавающая матрица, прессование, силовая реакция, прессующая пуансона, дифференциальное уравнение.

Одним из приоритетных направлений развития механики полимеров является создание наполненных полимерных материалов, в состав которых входят твердые минеральные вещества (песок, тальк и т.п.). В результате гранулирования частицы сыпучих материалов укрупняются и приобретают форму зерен. Гранулирование металлов и сплавов также применяется в порошковой металлургии. Фильтры из порошкового материала используются в химической промышленности. Прессование порошка, находящего в закрытой форме происходит под определенным давлением. В результате деформирования уменьшается начальный объем порошкового материала и образуется твердый брикет. Изменение объема происходит в результате смещения и деформирования отдельных частиц.

При необходимости прессования изделий с отношением высоты к диаметру больше единицы используют пресс-формы двустороннего прессования, когда усилия прилагаются к верхнему и нижнему пуансонам. В этом случае матрица может быть неподвижна, подвижна и «плавать» опираясь на пружины (усилие прилагают к верхнему пуансону).

**1. Математические модели трубчатой решетки.** Рассмотрим трубчатую решетку с отношением высоты к диаметру больше единицы двустороннего прессования  $\frac{H}{2R} > 1$  и

$\left(\frac{h}{R}\right)^{5/2} = \{0,03 - 0,06\}$ , где  $H$  - высота трубной решетки,  $h$  - высота эквивалентного слоя порошка,  $R$  - диаметр решетки.

Матрица пресс-формы «плавает» опираясь на пружины к верхнему пуансону. Трубчатую решетку рассматриваем как гиперболические градири на основании типа континуума Коссера. Сплошная силовая реакция описывается соотношением вида:

$$q_k + p_k - 2B \frac{d^3 w}{dx^3} + N_1 \frac{d^2 w}{dx^2} = P_{\text{сплош.}}$$

и содержит не только сплошную силовую реакцию, но и сплошную моментную реакцию, пропорциональную углам поворота и  $N_{kp}$  - в продольном направлении.

Исходные математические модели трубчатой решетки построены на основании работ [1]-[3].

**Модель 1.1.** Математическая модель верхнего слоя Пуассона пресс-формы двустороннего прессования, лежащего на основании типа континуума Коссера (модель В-6), описывается соотношением вида:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[ E(x) \frac{d^2 w}{dx^2} \right] + 2B \frac{d^3 w}{dx^3} = q_k, \quad (1.1)$$

где коэффициент

$$E(x) = \left\{ \frac{D}{x}; \frac{D}{1-x}; \frac{D}{1-x+\frac{x^2}{2}} \right\},$$

$$q_k = \lambda_k \frac{N}{Q} \gamma^2 \frac{1}{1+\lambda'_k \gamma^2} \left( \frac{h}{R} \right)^{5/2}. \quad (1.2)$$

Общее решение дифференциального уравнения (1) имеет вид:

$$w(x) = \int \left\{ e^{-2B \int \frac{dx}{E(x)}} \left[ \int \frac{a_k(x^2 + C_1 x + C_2)}{E(x)} e^{2B \int \frac{dx}{E(x)}} dx + C_3 \right] \right\} dx + C_4 \quad (1.3)$$

Итак, рассмотрим частный случай. Если  $E(x) = const = D$  в уравнении (1.1), то модель В-6 представляет собой математическую модель Б-6 трубчатой конструкции, лежащей на основании континуума Коссера в пределах теории упругости:

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} + 2B \frac{d^3 w}{dx^3} + k w = q_k \quad (1.4).$$

**Модель 1.2.** Математическая модель нижнего слоя пуансона пресс-формы двухстороннего прессования под действием продольной критической силы  $N_{kp}$  (модель В-5), описывается уравнением:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[ E(x) \frac{d^2 w}{dx^2} \right] - N_1 \frac{d^2 w}{dx^2} = q_k \quad (2.1)$$

Если ввести новые обозначения вида:

$$g(x) = \frac{N_1}{E(x)}, \quad f(x) = \frac{q_k \left( \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2 \right)}{E(x)}, \quad (2.2)$$

тогда исходное дифференциальное уравнение (2.1) приводится к виду:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} - g(x)w = f(x). \quad (2.3)$$

Ограничиваясь рассмотрением влияния равномерно распределенной активной нагрузки, частное решение неоднородного уравнения (2.3) можно записать в виде:

$$w_1(x) = \int \left[ \int f(x) dx \right] dx + C_3 x + C_4, \quad (2.4)$$

как общее решение дифференциального уравнения

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[ E(x) \frac{d^2 w}{dx^2} \right] = q_k. \quad (2.5)$$

Решение однородного уравнения

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = q(x)w(x). \quad (2.6)$$

получается как решения линейного уравнения первого порядка:

$$\frac{dw}{dx} - u(x)w = C_3 e^{-\int u(x) dx}, \quad (2.7)$$

где  $u(x)$  есть решение дифференциального уравнения Риккати:

$$\frac{du}{dx} + u^2(x) = \frac{N_1}{E(x)}. \quad (2.8)$$

Если  $\varphi_1 \neq 0$  и  $\varphi_2$  есть решения дифференциального уравнения:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = [g(x) + a]w \quad (2.9)$$

при  $a = \{a_1, a_2\}$ , тогда

$$u(x) = \varphi_1 \frac{d}{dx} \left( \frac{\varphi_2}{\varphi_1} \right) \quad (2.10)$$

есть решения дифференциального уравнения:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[ \varphi_1 \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{1}{\varphi_1} \right) + a_2 - a_1 \right] u = \left[ 2 \left( \frac{d\varphi_1}{dx} \right)^2 - g(x) + a_2 + 2a_1 \right] u. \quad (2.11)$$

Если  $\varphi_2$  в выражении (2.10) пробегает все решения уравнения (2.9), в котором  $a = a_2$ , то формула (2.10) дает все решения уравнения (2.11).

Таким образом, общее решение данной модели имеет вид:

$$w(x) = \int \left[ \int f(x) dx \right] dx + C_3 x + C_4 + e^{\int \varphi_1 \frac{d}{dx} \left( \frac{\varphi_2}{\varphi_1} \right) dx} \left[ \int C_3 e^{-2 \int \varphi_1 \frac{d}{dx} \left( \frac{\varphi_2}{\varphi_1} \right) dx} dx + C_4 \right]. \quad (2.12)$$

При частном случае, если  $E(x) = const = D$ , то модель В-5 представляет собой математическую модель Б-5 трубчатой конструкции, лежащей на основании типа Винклера:

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} - N_1 \frac{d^2 w}{dx^2} + k w = q_k, \quad (2.13)$$

а дифференциальное уравнение (2.5) представляет модель Б-1.

**Модель 1.3.** Математическая модель трубчатой решетки двухстороннего прессования с плавающей матрицей пресс-формы (модель В-7):

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{dx^2} \left[ E(x) \frac{d^2 w}{dx^2} \right] + 2B \frac{d^3 w}{dx^3} - 2N_1 \frac{d^2 w}{dx^2} - \\ & - [E''(x) + 2N_1 E'(x)] \frac{dw}{dx} + k w(x) = q_k. \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$E(x) = \left\{ \frac{D}{x}; \frac{D}{1-x}; \frac{D}{1-x + \frac{x^2}{2}} \right\},$$

$$q_k = \lambda_k \frac{N}{Q} \gamma^2 \frac{1}{1 + \lambda'_k \gamma^2} \left( \frac{4}{R} \right)^{s/2}. \quad (3.2)$$

Рассмотрим частные случаи (Модель Б-7):

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{2}{x} \frac{d^3 w}{dx^3} - \left( \frac{1}{x^2} + \frac{\eta}{D} \right) \frac{d^2 w}{dx^2} + \left( \frac{1}{x^2} - \frac{\eta}{D} \frac{1}{x} \right) \frac{dw}{dx} + w = \frac{q_k}{D}, \quad (3.3)$$

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} + 2B \frac{d^3 w}{dx^3} - 2N_1 \frac{d^2 w}{dx^2} + \eta \frac{dw}{dx} + k w = q_k \quad (3.4)$$

**• Физико-математические науки**

Дифференциальное уравнение (3.3) представляет собой один из вариантов модели С.Н.Соколова [4], общий интеграл которого имеет вид:

$$w(x) = C_1 J_0(xe^{i\varphi}) + C_2 J_0(xe^{-i\varphi}) + C_3 J_0(xe^{i\varphi}) + C_4 J_0(xe^{-i\varphi}) + \frac{q_k}{k} \quad (3.5)$$

где  $J_0, J_1$  - функции Бесселя первого и второго рода,  $\frac{dw}{dr} = \varphi$ , границы изменения параметра

$$\frac{\pi}{4} \leq \varphi < \frac{\pi}{2}.$$

Зная исходные математические модели технологии изготовления искусственных порошков 1.1-1.3, граничные условия на торцах и условие под нагрузкой можно решать задачи искажение формы усадки, пресс-формы до и после спекания порошковой формовки и т.д.

В работе [5] была рассмотрена математическая модель технологии усадки порошкового материала при неподвижной матрице.

В качестве примера рассмотрим задачу об изгибе нижнего слоя пуассона пресс-формы двухстороннего прессования без учета продольной критической силы ( $N_{kp}$ )

Пример 1. Построить график функции для материалов конструкции СВАМ (1:1, 5:1, 10:1, 15:1) с ПН-3 при следующих данных:

$$(h/R)^{5/2} = \{0,005, 0,006, 0,007, 0,008, 0,009, 0,01\}; \quad x = \{0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1,0; 1,2; 1,4; 1,6; 1,8; 2,0; 2,2; 2,4; 2,6; 2,8; 3,0; 3,2; 3,4; 3,6; 3,8; 4,0; \dots; 9,8; 10,0\},$$

$$w(x) = \frac{237}{9500} (x^6 - 3x^5 + 5x^4 - 230 \cdot 10^3 x + 155 \cdot 10^4) \left(\frac{h}{R}\right)^{5/2}$$

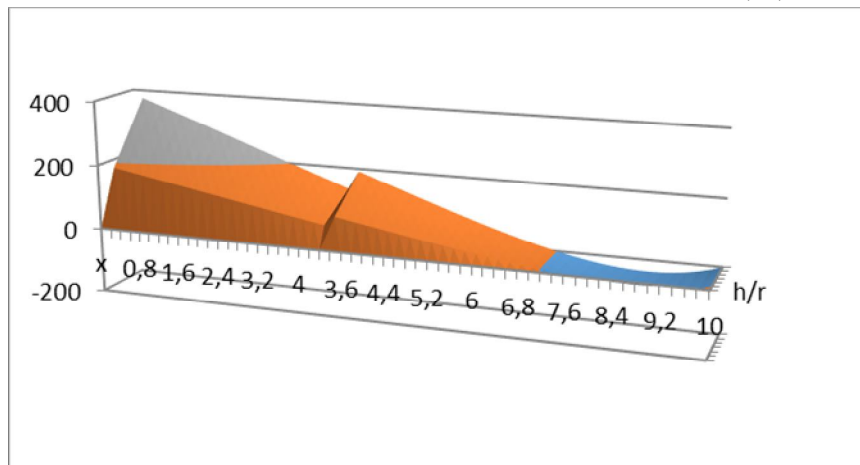
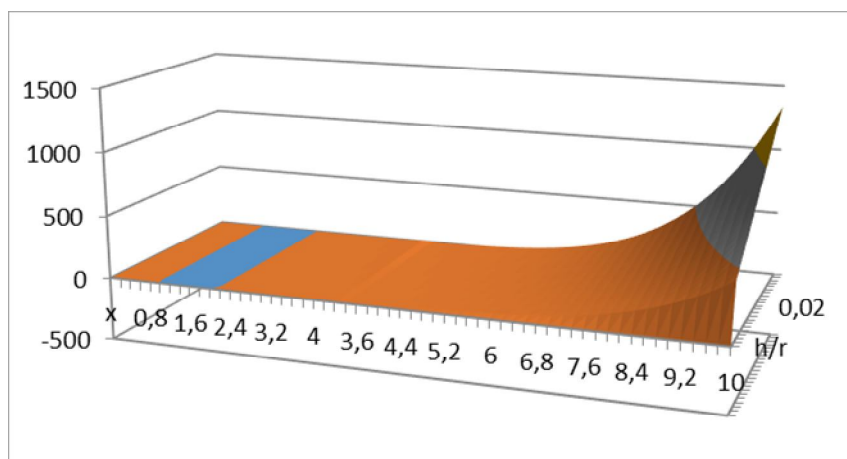


Рис. 1

Пример 2. Построить график функции  $w=w(x)$  для материалов конструкции СВАМ (1:1, 5:1, 10:1, 15:1) с ПН-3 при следующих данных  $(h/R)^{5/2} = \{0,01, 0,011, 0,012, 0,013, 0,014, 0,015, 0,016, 0,017, 0,018, 0,019, 0,02, 0,021, 0,022, 0,023, 0,024, 0,025, 0,026, 0,027, 0,028, 0,029, 0,03\}$ ;  $x = \{0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1,0; 1,2; 1,4; 1,6; 1,8; 2,0; 2,2; 2,4; 2,6; 2,8; 3,0; 3,2; 3,4; 3,6; 3,8; 4,0; \dots; 9,8; 10,0\}$ ,

$$w(x) = \frac{237}{9500} (2x^6 - 2x^5 - 3x^4 + 20 \cdot x^3 - 60 \cdot x^2 + 39) \left(\frac{h}{R}\right)^{5/2}$$



**Рис. 2**

На рисунках 1, 2 приведены графики искажения прессовки для материалов порошка нижнего слоя пуансона типа СВММ (1:1; 5:1; 10:1; 15:1) с ПН-3 при жесткой конструкции.

**Заключение.** Рассмотренные математические модели трубчатой решетки и системный анализ изгиба верхнего, нижнего и вложенного слоя пуансона пресс-формы двухстороннего прессования дают возможность развить механику наполненных полимерных материалов.

Решения математических моделей 1.1-1.3 дают возможность оценить надежность конструкционного, композиционного материала и изделий из трубчатых конструкции с наполнителями порошкового твердого и тяжелого сплава.

Искажение формы усадки, пресс-формы, порошковой формовки содержит в себе ценные результаты исследований влияния перфорации на жесткость плавающей матрицы трубчатой решетки.

Локальная импульсивная нагрузка возбуждает в прессовки волновой процесс, который существенным образом зависит от степени комплексной податливости и амплитуды силы внутреннего трения пуассона. Происходит изгибание в поверхностном слое верхнего и нижнего пуассона, имеющий местный характер.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1]. Е.Т.Божанов, Ж.С.Ержанов «Исследование проблем устойчивости упругих тел, гибких пластин и оболочек и их приложения», Алматы, 2001. 325С.
- [2]. Е.Т.Божанов, Ж.О.Отарбаев, С.Н.Буганова «Математическое моделирование геомеханических процессов», Алматы, 2015. 145С.
- [3]. А.Г. Братухин, О.С.Сироткин, П.Ф. Сабодаш, В.Н. Егоров «Материалы будущего и их удивительные свойства». - М.: Машиностроение, 1995. 125С.
- [4]. С.Н.Соколов «Круглая пластинка на обобщенном упругом основании». – М.: Инженерный сборник. Том 1. 1952, стр. 161-168.
- [5]. А.Н.Дадаева, Е.Т.Божанов, Ш.А.Акимжанова, А.Курмангали «Об одной математической модели технологии усадки порошкового материала при неподвижной матрице». Материалы II-Международной научно-практической конференции «Информационные и телекоммуникационные технологии: образование, наука и практика», Алматы (Казахстан), КазНУТУ им.К.И.Сатпаева с 3-4 декабря 2015г. 7С.

Божанов Е.Т., Ибраимкулов А.М., Дадаева А.Н., Сейткулова Ж.Н.

**Екі жақты таптағанда қалқитын матрицалы құбырлы шарбақты ұнтақты түрге келтірудің математикалық моделі**

**Түйіндеме.** «Қалқитын» матрицалы құбырлы шарбақтың әртүрлі математикалық моделі қарастырылады. Екі жақты пресстелген (тапталған) шарттағы жоғары және төмен салынған пуассон қабатының майысуының жүелік талдауы жасалған. Алынған шешім материал құрылымының сенімділігін бағалау мүмкіндігін анықтайтын шешім болып табылады және әртүрлі толтырғыштағы (мысалы, ұнтақ қорға) құбыр құрылымы өнімінің мүмкіндігін бағалайтын мүмкіндік болып табылады. Әртүрлі жүктемедегі пресстеу формасының (түрінің) өзгеруі суретте көрсетілген.

**Кілітті сөздер:** кубырлы шарбак, калкитын матрица, таптау. куш әсері, пуансон тапталуы, дифференциалдық тендеулер.

Bazhanov E.T., A.N.Dadaeva, Ebraimkulov F.V., Seitkulova S.M.

**Mathematical models of powder molding tubular lattice with the floating matrix at bilateral pressing**

**Summary.** Various mathematical models of a tubular lattice with a "floating" matrix are considered. The system analysis of a bend top and the lower enclosed punch layer in the conditions of bilateral pressing is carried out. The received decisions give the chance to estimate reliability of constructional material, and also a product from tubular designs with various fillers (powder alloys).

In drawings distortion of a form of pressing (filler) at various loadings is shown.

**Key words:** tubular lattice, floating matrix, pressing, power reaction, pressing punch, differential equation.

УДК 517. 968

**Е.М. Хайруллин**

(Казахский национальный исследовательский технический университет имени К.И.Сатпаева, Алматы, Республика Казахстан, [khairullin\\_42\\_42@mail.ru](mailto:khairullin_42_42@mail.ru))

**ОБ ОДНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧЕ МНОГОМЕРНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В КЛАССЕ РАСТУЩИХ ФУНКЦИЙ**

**Аннотация.** Рассматривается особая граничная задача многомерного параболического уравнения в классе растущих функций, когда краевое условие содержит производные порядка [1, 2], превышающего порядок уравнения. Решение ищется в виде теплового потенциала двойного слоя. Приведена лемма о нахождении пределов производных от искомой функции в окрестности гиперплоскости. Используя лемму и граничное условие, получено интегро-дифференциальное уравнение (ИДУ) параболическим оператором, когда порядок производной под знаком интеграла выше, чем порядок производной вне интеграла. ИДУ сведено к сингулярному интегральному уравнению (СИУ), когда неизвестная функция по пространственным переменным удовлетворяет условию Гельдера. Характеристическая часть СИУ решена методом интегральных преобразований Фурье-Лапласа в классе обобщенных функций. Найдено алгебраическое условие перехода обобщенного решения в классическое. Получены интегральные уравнения резольвенты для характеристической части СИУ. Методом регуляризации СИУ сведено к интегральному уравнению Вольтерра-Фредгольма второго рода. Показано, что решение СИУ является решением ИДУ. Получена теорема о разрешимости краевой задачи многомерного параболического уравнения, когда заданная функция по пространственным переменным удовлетворяет условию Гельдера и выполнено условие разрешимости.

**Ключевые слова:** многомерное, параболическое уравнение, интегро-дифференциальное уравнение, сингулярное интегральное уравнение, регуляризация.

1. Постановка задачи. Требуется найти решение  $u(x, t) \in C_{x,t}^{m, \frac{m}{2}}(Q_T)$  для параболического уравнения

$$L(D_x, D_t)u(x, t) = 0 \tag{1}$$

в области  $Q_T = \{(x, t) = (x', x_n, t): x' \in R^{n-1}, x_n \in R_+, t \in ]0, T[ \}$ , удовлетворяющее начальному условию

$$u(x, t)|_{t=0} = 0 \tag{2}$$

и граничному условию

$$L_m(D_x)|_{x_n=0} = f(x', t), (x', t) \in Q_T^{(1)} = Q_T \setminus x_n \tag{3}$$

где

$$L(D_x, D_t) = D_t - \sum_{k=1}^n a_{kk} D_{x_k}^2, \quad L_m(D_x) = \sum_{k_n=0}^m b_{m-k_n}(D_{x'}) D_{x_n}^{k_n},$$

$$b_{m-k_n}(D_{x'}) = \sum_{|k'| \leq m-k_n} b_{k', m-k_n} D_{x'}^{k'};$$