УДК 14.35.09

О.С. Сатыбалдиев, М.Д. Наукенова, М.Т. Касымбекова
(Казахский национальный иследовательский технический университет имени К.И.Сатпаева, Алматы, Республика Казахстан)

МНОГОСТОРОННИЙ ПОДХОД К ПОНЯТИЮ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА В ТЕХНИЧЕСКОМ ВУЗЕ

Аннотация. В статье доказывается равносильность различных подходов к понятию определенного интеграла. Это дает возможность при построении теории, а также в приложениях пользоваться тем определением, которое наиболее удобно в конкретной ситуации. Выбор различных классов функций, для которых строится теория интегрального исчисления, позволяет осуществить разно уровневый подход в преподаваний.

Ключевые слова: интеграл, первообразная, кредитная технология, суммы Дарбу, многосторонний подход.

Начиная с 2004 года вузы Республики Казахстан начали менять традиционную форму обучения и стали переходить на новую кредитную технологию обучения. В результате перехода на кредитную технологию обучения (при сохранившейся программе обучения): сократился общий объем часов в 1,56 раза; сократился объем контактных часов в 3,1 раза; увеличилась в два раза доля часов на самостоятельную работу студента (с 33% до 66%); введена новая форма обучения – СРСП, с долей отведенных часов – 33%.

Внедрение кредитной технологии обучения затрагивает всю идеологию образования. Кредитная технология опирается на индивидуализацию обучения, выборность образовательной траектории в рамках регламентации учебного процесса. Усиливается роль самостоятельной работы студента. Переход на новые образовательные технологии обусловлен необходимостью улучшения качества подготовки специалистов, разработки нового поколения учебных планов и программ, качественно иных характеристик специалиста с высшим профессиональным образованием. Внедрение кредитной технологии затрагивает всю идеологию образования. Преподаватель теперь не только передает знания, а главным образом учит, как надо учиться, добывать знания, приобретать навыки и умения профессиональной деятельности.

Переход на новую форму обучения требует пересмотра всей научно-методической обеспеченности дисциплин специальности, разработку новых инновационных методик обучения и воспитания студентов. Подготовка таких специалистов требует хороших знаний и практических навыков со стороны педагогического персонала. Необходимо наряду с методом прямого преподавания использовать активные методы обучения: деловые игры, учебные конкретные ситуации, метод моделирующих упражнений, мозговой штурм и др.

В статье рассматривается разносторонний подход к понятию определенного интеграла. Так как, во-первых, это предполагает рассмотрение одного и того же вопроса с различных точек зрения, в его развитии и связи с другими вопросами; во-вторых, этот способ является методически продуктивным. Действительно, при вычислении длины дуги кривой, площади поверхности тела вращения удобно пользоваться представлением определенного интеграла как предела интегральных сумм; при определении площади криволинейной трапеции, работы переменной силы, объемов тел вращения естественно опираться на разделяющее число множеств нижних и верхних сумм Дарбу; при решении задачи на определение пути по известному закону изменения мгновенной скорости разумнее опираться на представление интеграла как приращения первообразной.

В современной литературе по интегральному исчислению при всем её кажущемся многообразии можно выдвинуть четыре основных подхода, которые отличаются по способу введения понятия определенного интеграла и обоснованием средств, исследующих его приложения. Определенный интеграл может вводиться как:

1) предел интегральных сумм;
2) приращение первообразной;
3) единственное число, разделяющее множества нижних и верхних сумм Дарбу;
4) аддитивная функция промежутка.

Построение курса интегрального исчисления, основанное на введении определенного интеграла как предела интегральных сумм (интеграл Римана) соответствует историческому пути. Такое положение не является случайным, так как само понятие интегральной суммы, лежащее в основе метода, непосредственно возникает из многих практических задач и, кроме того, дает простейший способ приближенного вычисления определенного интеграла.

Однако в логическом плане построение курса интегрального исчисления, основанное на определении интеграла как предела интегральных сумм, является ответом непростым. Само определение интеграла Римана использует понятие предела интегральных сумм. Этот предел относится к одному из наиболее сложных типов предельного перехода, рассматриваемых современной математикой. Этот предел не является ни пределом последовательности, ни пределом функции, и поэтому применимость к нему основных свойств пределов требует специального доказательства.

Мы, преподаватели, знаем, что вопросы существования интеграла, интегрируемости функции при традиционном изложении трудны для студентов.

В учебном процессе изложение любой теории не может рассматриваться, вне условий её наилучшего усвоения, а потому закономерной является задача поиска иных изложений теории, более доступных, но не выхолащивающих её идейного содержания. В этой связи отметим в начале метод, в котором интеграл определяется как совпадающее значение нижнего и верхнего интегралов Дарбу. Это определение логически весьма прозрачно и непосредственно связано с решением многих задач прикладного характера. Опыт использования этого определения показывает, что оно хорошо усваивается большинством студентов. При таком подходе некоторые теоремы интегрального исчисления значительно упрощаются. Например, теорема о среднем или теорема об интегрируемости непрерывной функции. Доказательство последней теоремы не использует в традиционном виде такого сложного понятия как равномерная непрерывность функции на отрезке и теорему Кантора о равномерной непрерывности.

Как видно, при построении теории такой метод введения определенного интеграла в ряде вопросов дает методический выигрыш. Однако он имеет и свои недостатки. Например, теорема об интегралах суммы становится далеко не простой, возникают трудности и при использовании указанного определения, в ряде приложений. Но в целом уровень сложности такой же как и в традиционном изложении.

В XVIII и большой части XIX веков интегральное исчисление строилось на основе введения определенного интеграла как приращения первообразной. Такое введение определенного интеграла сразу обеспечивает простоту и доступность теории. Действительно, при этом подходе к понятию интеграла легкость доказательства теорем (например, доказательства свойств определенного интеграла) делает всю теорию интегрального исчисления доступной практически всем студентам и даже школьникам.

Однако, некоторый формализм определения не дает сразу почувствовать и понять истоки происхождения основного понятия «интеграл», увидеть важную сферу его приложений. И самое важное: нужно понимать, что определение интеграла как разности значений первообразной зависит от субъективного умения найти первообразную. Поэтому, для того, чтобы в современных условиях этот метод имел самостоятельное значение необходимо прямое доказательство существования первообразной для достаточного широкого класса функций.

Еще один подход к введению интеграла как аддитивной функции промежутка основан на детальном изучении свойств нижнего и верхнего интегралов Дарбу. Он позволяет сразу доказать эквивалентность трех указанных ранее методов введения определенного интеграла применительно к классу ограниченных на отрезке функций и имеющих не более конечного числа точек разрыва. Кроме того, этот способ дает возможность создать и применять удобную общую схему приложений определенного интеграла.

Однако введение тонких новых понятий, как аддитивные и полуаддитивные функции отрезка (промежутка), исследования их свойств, введение новой символики значительно затрудняют усвоение основного понятия определенного интеграла.

В связи с кредитной технологией обучения необходимо готовить студентов к системному владению основными понятиями высшей математики. Мы считаем, что целесообразным включить в содержание курса интегрального исчисления все три указанных определения интеграла, то есть следует применить разносторонний подход к понятию определенного интеграла. При этом не соперничество, а взаимное дополнение различных способов ведения определенного интеграла является методически продуктивным.

С научно-методических позиций подготовки специалистов ни одно из фундаментальных качеств определенного интеграла, являющегося пределом интегральных сумм, единственным разделяющим числом множеств нижних и верхних сумм Дарбу, разностью значений первообразной, не должно быть утрачено. Это проще всего добиться, если с самого начала доказать равносильность указанных определений интеграла для некоторого класса функций. Мы так и будем делать.

В техническом вузе мы дадим элементарное доказательство эквивалентности трех подходов к понятию определенного интеграла для более узкого класса функций.

Теорема. Пусть функция $y = f(x)$ монотонна на отрезке $[a;\, b]$ и имеет первообразную $F(x)$ на этом отрезке. Тогда у функции $y = f(x)$ существуют:

1) $F(b) - F(a)$, независимо от выбора нервообразной;

2) предел игтегральных сумм;

3) единственное число, разделяющее множество нижних и верхних сумм Дарбу.

Все эти числа совпадают.

После доказательства этой теоремы, т.е равносильности трактовок определенного интеграла всю теорию целесообразно излагать самым простым, доступным для восприятия способом, то есть основываясь на представлении интеграла как приращения первообразной. При этом использовать другие определения интеграла в тех случаях, когда это методически более оправдано, например, в приложениях определенного интеграла. Действительно, при вычислении длины дуги кривой, площади поверхности тела вращения удобно использоваться представлением определенного интеграла как предела интегральных сумм; при определении площади криволинейный трапеции, работы переменный силы, обьемов тел вращения естественно опираться на представление интеграла как единственного разделяющего числа множеств нижних и верхних сумм Дарбу; при решении задачи на определение пути по известному закону изменения мгновенной скорости, а также при доказательстве свойств определенного интеграла разумнее опираться на представление интеграла как приращение первообразной.

Следует подчеркнуть, что именно предположение о существовании первообразных и наличие монотонности рассматриваемых функций позволяет существенно упростить изложение и яснее выразить содержание понятие интеграла, не отвлекая внимание на преодоление технических трудностей.

Многосторонний подход к понятию интеграла дает возможность студентам охватить это понятие полностью, рассмотреть со всех сторон, увидеть взаимосвязи этих определений.

Таким образом, различный подход к понятию интеграла позволяет, использовать в приложениях ту форму определенного интеграла, которая в данной задаче наиболее выгодня.

С начала дадим некоторые понятия и определения.

Лемма 1. Если

$$\alpha \le x \le \beta \text{ и } \alpha \le y \le \beta$$

$$|x - y| \le \beta - \alpha .$$

Геометрически это положение вытекает из того, что x и y принадлежит отрезку $[\alpha;\, \beta]$, и, следовательно, расстояние между ними $|x - y|$ не превзойдет длины самого отрезка.

Пусть на отрезке $[a;\, b]$ задана непрерывная функция $y = f(x)$. Рассмотрим плоскую фигуру, ограниченную вертикальными прямыми $x = a$ и $x = b$, осью абсцисс и графиком функции $y = f(x)$. Такая фигура носит название криволинейной трапеции. Приведем вспомогательное построение. Разобьем отрезок $[a;\, b]$ на n частей точками деления $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b$. Через эти точки проведем отрезки прямых до пересечения с графиком функции $y = f(x)$. На i-м участке разбиение построим два прямоугольника с общим основанием $[x_{i-1};\; x_i]$ и высотами равными наибольшему M_i и наименьшему m_i значениям функции $f(x)$ на этом участке, $i = 1, 2, ..., n$. Получив две ступенчатые фигуры, состоящие из прямоугольников, одна из которых содержится в криволинейной трапеции, а другая содержит криволинейную трапецию. Площадь первой из них обозначим $\underline{S}$, а второй $\overline{S}$. Очевидно, что площади этих фигур будут выражаться формулами:

$$\underline{S} = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i ; \quad \overline{S} = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i , \tag{1}$$

где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Суммы $\underline{S}$ и $\overline{S}$ называется соответственно нижней и верхней суммами Дарбу. Они вполне определяются разбиением отрезка на части.

Из интуитивно-наглядных представлений видно, что криволинейная трапеция имеет площадь, численное значение которой S заключено между значениями нижней и верхней сумм Дарбу, то есть

$$\underline{S} \le S \le \overline{S} . \tag{2}$$

Любое значение какой-либо суммы Дарбу можно принять за приближенное значение площади этой криволинейной трапеции. Очевидно, что точность такого приближения не превзойдет разности $\overline{S} - \underline{S}$.

Обратимся снова к криволинейной трапеции, определенной выше. На i-м участке разбиения зафиксируем произвольную точку ξ_i и построим прямоугольник с основанием $[x_{i-1};\, x_i]$ и высотой $f(\xi_i)$, $i = 1,2,...,n$. Получим ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, частично содержащихся в криволинейной трапеции и частично выходящих за ее пределы. Площадь такой ступенчатой фигуры выражается формулой

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i , \tag{3}$$

где $f(\xi_i)$ значение функции в произвольно выбранной точке ξ_i i-го участка разбиения отрезка $[a;\, b]$, а Δx_i длина i-ого отрезка.

Сумма σ носит название интегральной. В отличие от сумм Дарбу интегральная сумма для данной функции определяется не только разбиением отрезка $[a;\, b]$ на части, но и выбором точек $\xi_i \, (i = 1,2,..., n)$.

Так как при фиксированном разбиении

$$m_i \le f(\xi_i) \le M_i , \tag{4}$$

то умножив обе части неравенства (3) на Δx_i и просуммировав по всем i, получим

$$\underline{S} \le \sigma \le \overline{S} . \tag{5}$$

Замечание. При увеличении числа участков разбиения (причем так, чтобы длина наибольшего из этих участков $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} \{\Delta x_i\}$ стремилась к нулю) численное значение интегральной суммы будет стремиться к значению площади криволинейной трапеции.

Определение. Под пределом интегральной суммы σ, будем понимать число I, к которому стремится последовательность значении суммы σ, отвечающих всевозможным разбиениям отрезка $[a;\, b]$, при которых наибольшая из длин отрезков разбиения λ стремится к нулю $(\lambda \to 0)$, если при этом число I не зависит ни от способа разбиения, ни от выбора точек ξ_i внутри участков разбиения

$$I = \lim_{\lambda \to 0} \sigma = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i .$$

Приступая к доказательству теоремы, охарактеризуем для студентов его основные этапы, составим план доказательства, который структурируется в соответствии с содержанием теоремы, на ее основе.

1. Сначала напомним студентов соотношение (5), т.е.

$$\underline{S} \le \sigma \le \overline{S} .$$

2. Докажем свойство разности значений первообразной

$$\underline{S} \le I \le \overline{S}.$$

Для доказательства этого неравенство необходима теорема Лагранжа.

3. Оценим разности $\overline{S} - \underline{S}$. Докажем, что

$$\overline{S} - \underline{S} \le \lambda \cdot |f(b) - f(a)|, \text{ где } \lambda = \max_{1 \le i \le n} \{\Delta x_i\}.$$

4. Докажем, что между всевозможными нижними и верхними суммами Дарбу заключено единственное число. То есть, покажем, что если

$$\underline{S} \le I_1 \le \overline{S} \text{ и } \underline{S} \le I_2 \le \overline{S}, \text{ то } I_1 = I_2.$$

Опираясь на результаты пункта 2 и пункта 4, делаем вывод о том, что

$$I = F(b) - F(a)$$

есть единственное число, разделяющее множества нижних и верхних сумм Дарбу.

5. Докажем, что

$$\lim_{\lambda \to 0} \sigma = I,$$

то есть пределом интегральных сумм является то же число

$$I = F(b) - F(a)$$

разность значений первообразной.

Доказательство теоремы. Первый пункт плана доказательства хорошо отработан на подготовительном этапе, поэтому доказательство сразу начнем со второго пункта.

Для определенности будем считать функцию $y = f(x)$ возрастающей на $[a; b]$. Обозначим через I приращение $F(b) - F(a)$ первообразной функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$. Поскольку все первообразные функции отличаются друг от друга лишь на постоянную, то приращение первообразной $I = F(b) - F(a)$ не зависит от выбора первообразной $F(x)$.

Докажем, что для любой нижней суммы Дарбу выполняется неравенство

$$\underline{S} \le I.$$

Пусть нижняя сумма Дарбу отвечает какому-либо разбиению отрезка $[a; b]$. Для приращения первообразной $F(x_i) - F(x_{i-1})$ на i-ом отрезке разбиения $[x_{i-1}; x_i]$ применим теорему Лагранжа:

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(c_i)(x_i - x_{i-1}) = f(c_i)\Delta x_i.$$

Так как m_i - наименьшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$, то $m_i \le f(c_i)$, откуда

$$m_i \Delta x_i \le f(c_i)\Delta x_i = F(x_i) - F(x_{i-1}).$$

Поскольку эти неравенства справедливы при любом $i = 1,2,...,n$, получаем совокупность неравенств:

$$\begin{gathered} m_1 \Delta x_i \le F(x_i) - F(a), \\ m_2 \Delta x_2 \le F(x_2) - F(x_1), \\ \text{-------------} \\ m_n \Delta x_4 \le F(b) - F(x_{n-1}). \end{gathered}$$

Складывая эти неравенства, получим

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \le F(b) - F(a), \text{ т.е. } \underline{S} \le I.$$

Аналогично доказывается соотношение $I \le \overline{S}$ для любой верхней суммы Дарбу.

Следовательно, независимо от разбиений отрезка $[a; b]$, для которых вычислены суммы $\underline{S}$ и $\overline{S}$, имеет место соотношение

$$\underline{S} \le I \le \overline{S}. \tag{6}$$

Покажем теперь, что при достаточно мелком разбиении отрезка $[a; b]$ разность $\overline{S} - \underline{S}$ может стать сколь угодно малой. Обратимся к рисунку 1.

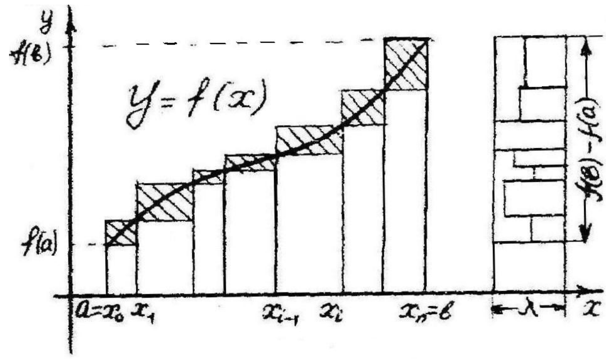

Рис.1

На нем изображены криволинейная трапеция, образованная монотонно возрастающей функцией $f(x)$ на $[a; b]$, верхняя и нижняя суммы Дарбу для конкретного разбиения. Разность $\overline{S} - \underline{S}$ одного и того же разбиения равна сумме площадей заштрихованных прямоугольников. Сделаем дополнительное построение. Проведем прямую, параллельную оси ординат и не пересекающую отрезок $[a; b]$. К этой прямой, как к «стенке», параллельно оси Ox перенесем все заштрихованные прямоугольники. Очевидно, что сумма площадей этих прямоугольников не превзойдет площади прямоугольника с основанием, длина которая равна наибольшей из длин отрезков разбиения $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n}\{\Delta x_i\}$ и высотой, равной $f(b) - f(a)$ (если учесть случай монотонного убывания функции, то следует понимать знак модуля $|f(b) - f(a)|$). Таким образом, получена оценка

$$\overline{S} - \underline{S} \le \lambda \cdot |f(b) - f(a)|. \tag{7}$$

Аналогично устанавливается оценка для монотонно убывающей функции.

Число λ служит мерой измельченного разбиения. Оценка (7) показывает, что разность $\overline{S} - \underline{S}$ становится меньше любого наперед заданного числа, как только λ достаточно мало. Это свойство можно выразить так: разность $\overline{S} - \underline{S}$ стремится к нулю при $\lambda \to 0$.

Выше было показано, что число $I = F(b) - F(a)$ заключено между всевозможными нижними и верхними суммами Дарбу. Докажем, что число, обладающее таким свойством, единственно.

Пусть I_1 - какое-либо число, удовлетворяющее соотношению $\underline{S} \le I_1 \le \overline{S}$ для любых $\underline{S}$ и $\overline{S}$. Одновременно в силу (6), $\underline{S} \le I \le \overline{S}$. Применим к этим двум неравенствам лемму 1, и, воспользовавшись оценкой (7), получим

$$|I - I_1| \le \lambda \cdot |f(b) - f(a)|. \tag{8}$$

Первая часть неравенства (7) за счет выбора λ может быть сколь угодно малой. Так как $|I - I_1|$ - постоянное неотрицательное число, то отсюда следует, что $|I - I_1| = 0$ или $I = I_1$, что и требовалось доказать.

Теперь составим неравенства (5) и (6), применив к ним лемму 1 и оценку (7) имеем

$$|\sigma - I| \le \lambda \cdot |f(b) - f(a)|. \tag{9}$$

Из соотношения (9) следует, что левая часть неравенства может быть сделана меньше сколь угодно малого положительного числа за счет достаточной малости λ (несмотря на то, что σ зависит от разбиения и от выбора точек ξ_i). Сказанное представляет собой определение того, что число I является пределом интегральных сумм σ при $\lambda \to 0$, то есть

$$\lim_{\lambda \to 0} \sigma = I.$$

Итак, для любой функции $f(x)$, монотонной на $[a; b]$ и имеющей первообразную $F(x)$ на этом отрезке, доказано, что

1) существует предел интегральных сумм при $\lambda \to 0$ и он равен $I = F(b) - F(a)$;

2) существует единственное число, заключенное между множествами нижних и верхних сумм Дарбу, которое тоже равно $I = F(b) - F(a)$.

Теорема доказана.

Это теорема позволяет по-разному определить одно и то же число I, которое называют определенным интегралом и обозначают

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Таким образом, утверждения 1), 2), 3) теоремы можно рассматривать как равносильные формулировки определения определенного интеграла.

Получив различные определения определенного интеграла и доказав их равносильность, дальнейшую теорию можно строить наиболее простым и удобным способом. Перед студентами могут быть поставлены творческие задачи по выявлению того определения, которым целесообразно воспользоваться в каждом конкретном случае. Например, при доказательстве свойств определенного интеграла они делают вывод, что удобнее пользоваться определением 1).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Моро М.И., Пышкало А.М. О совершенствовании методов обучения математике / Сост. Крамор В.С.- М.: Просвещение, 1997. - 279с.

[2] Архангельский С.И. Лекции по теории обучения в высшей школе. - М.: Высшая школа, 2005. - 317с.

[3] Дьедонне Ж. Основы современного анализа. - М.: Мир, 2003. -430с.

[4] Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии: В 2-х томах. Т.1: Пер. с нем. / Под ред. М.И.Постникова. - М.: Наука / Гл. ред. физ.-мат. лит., 1998. – 456 с.

[5] Сатыбалдиев О.С. Интегралдық есептеулер курсын кәсіби-педагогикалық бағдарда оқыту. - Алматы: РБК, 2007. - 79 б.

[6] Кузьмина Н.В. Проблемы профессиональной подготовки специалистов в вузах / В сб. Проблемы отбора и профессиональной подготовки специалистов в вузах. - Л.: Знание, 2000. - С. 77-88.

Сатыбалдиев О.С., Наукенова М.Д., Қасымбекова М.Т.

Жоғары техникалық оқу орындарында анықталған интегралды оқытудағы көпжақтылық тәсіл

Түйіндеме. Мақалада анықталған интеграл түсінігін ендірудің әртүрлі тәсілдерінің пара-пар екендігі дәлелденеді. Бұл мәселе анықталған интеграл теориясын құруды және оларды қолдануда қай анықтамам ыңғайлы және жеңіл соны пайдалануға мүмкіндік береді. Интеграл теориясын құрудағы әртүрлі функциялар тобын таңдау оқытуда көп жақтылық тәсілді жүзеге асырады.

Түйін. Мақалада жоғары техникалық оқу орындарында бір айнымалы функциясының интегралдық есептеулер курсын жаңа әдіс бойынша оқыту арқылы студенттердің кәсіби даярлықтарын жетілдіру жолдары қарастырылады.

Satybaldiyev O., Naukenova M., Kasymbekova M.

Multi-faceted approach to understanding of define integral in technical university

Summary. In article is proved equivalence of various approaches to concept of particular integral. It gives the chance at creation of theory, also in appendices to use that definition which is the most convenient in concrete situation. The choice of various classes of functions for which the theory of an integral calculus is under construction allows to carry out differently-level approach in teaching.

Key words. Integral, antiderivative, credit technology, sums of Darboux, multilateral approach.