УДК 517.75, 517.927, 517.956.3

Ж.М. Кадирбаева, А.С. Кожебаева, Н.Х.Маметжанова
(Казахский государственный женский педагогический университет, Казахстан, г. Алматы
apelman86pm@mail.ru, ainagulk@yandex.ru, naznur-85@mail.ru)

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМ НАГРУЖЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С МНОГОТОЧЕЧНЫМ ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ

Аннотация. Рассматривается линейная краевая задача для системы нагруженных дифференциальных уравнений с многоточечным интегральным условием. Для решения рассматриваемой задачи применяется метод параметризации. Разбиением интервала точками нагружения и введением дополнительных параметров линейная краевая задача для системы нагруженных дифференциальных уравнений с многоточечным интегральным условием сводится к эквивалентной краевой задаче с параметрами. Эквивалентная краевая задача с параметрами состоит из задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с параметрами, многоточечного интегрального условия и условия склеивания. Решение задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с параметрами строится с помощью фундаментальной матрицы дифференциального уравнения. Подставляя значения в соответствующих точках построенного решения в многоточечное интегральное условие и условие склеивания, составляется система линейных алгебраических уравнений относительно параметров. Предложен численный метод решения рассматриваемой задачи, основанный на решении построенной системы и методе Рунге-Кутта 4-го порядка точности для решения задач Коши на подинтервалах.

Ключевые слова: краевая задача, метод параметризации, нагруженное дифференциальное уравнение, интегральное условие.

Задачи с нелокальными условиями представляют собой одно из динамично развивающихся направлений современной теории дифференциальных уравнений. Особое место среди нелокальных задач занимает класс задач с нелокальными интегральными условиями, которые являются обобщением локальных и дискретных нелокальных условий. Нелокальные интегральные условия возникают при изучении различных физических явлений в случае, когда граница области протекания процесса недоступна для непосредственного измерения. В качестве примеров можно привести задачи, связанные с исследованием диффузии частиц в турбулентной плазме, процессов распространения тепла, процесса влагопереноса в капиллярно-пористых средах, при математическом моделировании технологического процесса внешнего геттерирования, применяемого для очищения кремниевых плат от примесей, а также при исследовании некоторых обратных задач математической физики [1-4].

В последние годы наблюдается интенсивное исследование нагруженных дифференциальных уравнений, связанное с различными приложениями задач, ассоциированных с нагруженными уравнениями. К задачам приложений, описываемых этими уравнениями, относятся задача долгосрочного прогнозирования и регулирования уровня грунтовых вод и почвенной влаги [5-7], моделирования процессов переноса частиц, некоторые задачи оптимального управления [1,8]. Отметим, что нагруженные дифференциальные уравнения описывают процессы с последействием, в которых состояние процесса в какой-либо точке и в какой-либо момент может оказывать влияние на весь процесс в целом [7].

В работах [4, 8-10] предложен численный метод решения систем линейных неавтономных обыкновенных нагруженных дифференциальных уравнений с неразделенными многоточечными и интегральными условиями. Метод основан на операции свертывания интегральных условий в локальные, что позволяет свести решение исходной задачи к решению задачи Коши относительно систем обыкновенных дифференциальных уравнений и линейных алгебраических уравнений. При использовании метода линеаризации предлагаемый подход применен для решения систем нелинейных нагруженных обыкновенных дифференциальных уравнений с нелокальными условиями.

В настоящей работе рассматривается линейная краевая задача для системы нагруженных дифференциальных уравнений с многоточечным интегральным условием

$$\frac{dx}{dt} = A_0(t)x + \sum_{i=1}^{m} A_i(t)x(\theta_i) + f(t), \quad t \in (0,T), \;\; x \in R^n, \tag{1}$$

$$B_0x(0) + D_0x(\theta_1) + C_0x(T) + \int_0^T M(t)x(t)dt = d, \quad d \in R^n, \tag{2}$$

где матрицы $A_j(t), M(t)$, $j = \overline{0,m}$, размерности $(n \times n)$ и n–вектор-функция $f(t)$ непрерывны на $[0,T]$, B_0, D_0 и C_0 – постоянные матрицы размерности $(n \times n)$, $0 = \theta_0 < \theta_1 < \ldots < \theta_m < \theta_{m+1} = T$.

Через $C([0, T], R^n)$ обозначим пространство непрерывных функций $x:[0, T] \to R^n$ с нормой $\|x\|_1 = \max_{t\in[0,T]}\|x(t)\|$.

Непрерывная на $[0,T]$ функция $x(t)$, имеющая на $(0, T)$ непрерывную производную по t, называется решением краевой задачи (1), (2), если она удовлетворяет системе нагруженных дифференциальных уравнений (1) и многоточечному интегральному краевому условию (2).

Ранее в работах [11–15] линейная двухточечная краевая задача для нагруженных дифференциальных уравнений исследовалась методом параметризации [16]. Были установлены необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости указанной задачи. Применение метода параметризации к исследованию краевой задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с многоточечными условиями также позволило получить необходимые и достаточные условия корректной разрешимости [17].

В данной работе задача (1), (2) исследуется методом параметризации. Интервал $[0,T]$ разбиваем на части точками нагружения: $[0,T) = \bigcup_{r=1}^{m+1}[\theta_{r-1},\theta_r)$.

Введем пространство $C([0, T], \theta, R^{n(m+1)})$ систем функций $x[t] = (x_1(t), x_2(t),\ldots, x_{m+1}(t))$, где функции $x_r(t)$, $r = \overline{1,m+1}$, непрерывны на $[\theta_{r-1},\theta_r)$ и имеют конечные левосторонние пределы $\lim_{t\to\theta_r-0} x_r(t)$, $r = \overline{1,m+1}$, с нормой $\|x[\cdot]\|_2 = \max_{r=\overline{1,m+1}} \sup_{t\in[\theta_{r-1},\theta_r)} \|x_r(t)\|$.

Сужение вектор-функции $x(t)$ на r-ый интервал $[\theta_{r-1},\theta_r)$ обозначим через $x_r(t)$, т.е. $x_r(t) = x(t)$ при $t \in [\theta_{r-1},\theta_r)$, $r = \overline{1,m+1}$.

Введем параметры $\lambda_r = x_r(\theta_{r-1})$, $r = \overline{1,m+1}$, и на каждом интервале $[\theta_{r-1},\theta_r)$ произведем замену $u_r(t) = x_r(t) - \lambda_r$, $r = \overline{1,m+1}$. Введение дополнительных параметров позволяет получить начальные данные. Тогда исходная задача (1), (2) перейдет к эквивалентной краевой задаче с параметрами

$$\frac{du_r}{dt} = A_0(t)(u_r + \lambda_r) + \sum_{j=1}^{m} A_j(t)\lambda_{j+1} + f(t), \quad t \in [\theta_{r-1},\theta_r), \tag{3}$$

$$u_r(\theta_{r-1}) = 0, \quad r = \overline{1,m+1}, \tag{4}$$

$$B_0\lambda_1 + D_0\lambda_2 + C_0\lambda_{m+1} + C_0 \lim_{t\to T-0} u_{m+1}(t) + \sum_{k=1}^{m+1} \int_{\theta_{k-1}}^{\theta_k} M(t)[u_k(t) + \lambda_k]dt = d, \tag{5}$$

$$\lambda_p + \lim_{t\to\theta_p-0} u_p(t) = \lambda_{p+1}, \quad p = \overline{1,m}. \tag{6}$$

Решением задачи (3)-(6) является пара $(\lambda, u[t])$ с элементами $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2,\ldots,\lambda_{m+1}) \in R^{n(m+1)}$, $u[t] = (u_1(t), u_2(t),\ldots,u_{m+1}(t)) \in C([0, T], \theta, R^{n(m+1)})$, где функции $u_r(t)$ непрерывно дифференцируемы на $[\theta_{r-1},\theta_r)$, $r = \overline{1,m+1}$, и при $\lambda_r = \lambda_r^*$ удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений (3) и условиям (4)-(6).

Задачи (1), (2) и (3)–(6) эквивалентны. Если пара $(\widetilde{\lambda}, \widetilde{u}[t])$, где $\widetilde{\lambda}=(\widetilde{\lambda}_1,\widetilde{\lambda}_2,...,\widetilde{\lambda}_{m+1})\in R^{n(m+1)}$, $\widetilde{u}[t]=(\widetilde{u}_1(t), \widetilde{u}_2(t),...,\widetilde{u}_{m+1}(t))\in C([0,T],\theta,R^{n(m+1)})$ – решение задачи (3)-(6), то функция $\widetilde{x}(t)$ определяемая равенствами $\widetilde{x}(t)=\widetilde{\lambda}_r+\widetilde{u}_r(t)$, $t\in[\theta_{r-1},\theta_r)$, $r=\overline{1,m+1}$, $\widetilde{x}(T)=\widetilde{\lambda}_{m+1}+\lim\limits_{t\to T-0}\widetilde{u}_{m+1}(t)$ будет решением исходной задачи (1), (2). И наоборот, если функция $x(t)$ является решением задачи (1), (2), то пара $(\lambda, u[t])$ где $\lambda=(x(\theta_0),x(\theta_1),...,x(\theta_m))$, $u[t]=(x(t)-x(\theta_0),\ x(t)-x(\theta_1),...,x(t)-x(\theta_m))$, будет решением задачи (3)-(6).

При фиксированных значениях параметров $\lambda\in R^{n(m+1)}$ систему функций $u[t]$ можно определить решая задачи Коши (3), (4). Используя $X(t)$ – фундаментальную матрицу дифференциального уравнения $\frac{dx}{dt}=A(t)x$, решение задачи Коши (3), (4) запишем в виде

$$u_r(t)=X(t)\int\limits_{\theta_{r-1}}^{t}X^{-1}(\tau)\left[A_0(\tau)\lambda_r+\sum_{j=1}^{m}A_j(\tau)\lambda_{j+1}+f(\tau)\right]d\tau,\ t\in[\theta_{r-1},\theta_r),\quad r=\overline{1,m+1}. \tag{7}$$

Переходя в правой части (7) к пределу при $t\to\theta_r-0$, и подставив соответствующие им выражения в условия (5), (6), получим систему уравнений относительно неизвестных параметров λ_r, $r=\overline{1,m+1}$:

$$\begin{aligned}&B_0\lambda_1+D_0\lambda_2+C_0\lambda_{m+1}+C_0X(T)\int\limits_{\theta_m}^{T}X^{-1}(\tau)\left[A_0(\tau)\lambda_{m+1}+\sum_{j=1}^{m}A_j(\tau)\lambda_{j+1}\right]d\tau+\\&+\sum_{k=1}^{m+1}\int\limits_{\theta_{k-1}}^{\theta_k}M(t)\left\{X(t)\int\limits_{\theta_{k-1}}^{t}X^{-1}(\tau)\left[A_0(\tau)\lambda_k+\sum_{j=1}^{m}A_j(\tau)\lambda_{j+1}\right]d\tau+\lambda_k\right\}dt=\\&=d-C_0X(T)\int\limits_{\theta_m}^{T}X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau-\sum_{j=1}^{m+1}\int\limits_{\theta_{j-1}}^{\theta_j}M(t)X(t)\int\limits_{\theta_{j-1}}^{t}X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau dt,\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}&\lambda_p+X(\theta_p)\int\limits_{\theta_{p-1}}^{\theta_p}X^{-1}(\tau)\left[A_0(\tau)\lambda_p+\sum_{j=1}^{m}A_j(\tau)\lambda_{j+1}\right]d\tau-\lambda_{p+1}=\\&\qquad=-X(\theta_p)\int\limits_{\theta_{p-1}}^{\theta_p}X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau,\ p=\overline{1,m}.\end{aligned} \tag{9}$$

Матрицу соответствующую левой части системы уравнений (8), (9) обозначим через $Q_*(\theta)$ и систему запишем в виде

$$Q_*(\theta)\lambda=-F_*(\theta),\quad \lambda\in R^{n(m+1)}, \tag{10}$$

где

$$F_*(\theta)=\begin{pmatrix}-d+C_0X(T)\int\limits_{\theta_m}^{T}X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau+\sum\limits_{j=1}^{m+1}\int\limits_{\theta_{j-1}}^{\theta_j}M(t)X(t)\int\limits_{\theta_{j-1}}^{t}X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau dt\\ X(\theta_1)\int\limits_{\theta_0}^{\theta_1}X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau\\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\\ X(\theta_m)\int\limits_{\theta_{m-1}}^{\theta_m}X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau\end{pmatrix}.$$

Разрешимость линейной краевой задачи с многоточечным интегральным условием для системы нагруженных дифференциальных уравнений (1), (2) эквивалентна разрешимости системы (10).

Предлагаемый численный метод основан на построении и решении системы (10). Как видно из уравнений (8), (9), коэффициенты и правая часть системы (10) находятся как решение матричных и векторных задач Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dz}{dt} = A_0(t)z + A_i(t), \ t \in [\theta_{r-1}, \theta_r), \ i = \overline{0,m}, \ z(\theta_{r-1}) = 0, \ r = \overline{1,m+1}, \tag{11}$$

$$\frac{dz}{dt} = A_0(t)z + f(t), \ t \in [\theta_{r-1}, \theta_r), \ z(\theta_{r-1}) = 0, \ r = \overline{1,m+1}. \tag{12}$$

Каждый подинтервал $[\theta_{i-1}, \theta_i)$, $i = \overline{1,m+1}$, делим на N_i частей, приближенные значения коэффициентов и правой части системы (10) найдем решая матричные и векторные задачи Коши (11), (12) методом Рунге-Кутта 4-го порядка точности с шагом $h_i = (\theta_i - \theta_{i-1})/N_i$, $i = \overline{1,m+1}$, на каждом i -ом интервале.

Тогда получим следующую приближенную систему алгебраических уравнений относительно параметров λ:

$$Q_*^{\tilde{h}}(\theta)\lambda = -F_*^{\tilde{h}}(\theta), \ \lambda \in R^{n(m+1)}, \ \tilde{h} = (h_1, h_2, ..., h_{m+1}). \tag{13}$$

Решая систему (13) найдем $\lambda^{\tilde{h}} \in R^{n(m+1)}$. Как было отмечено выше компоненты $\lambda^{\tilde{h}} = \left(\lambda_1^{\tilde{h}}, \lambda_2^{\tilde{h}}, ..., \lambda_{m+1}^{\tilde{h}}\right)$ являются значениями приближенного решения задачи (1), (2) в начальных точках подинтервалов: $x^{\tilde{h}_r}(\theta_0) = \lambda_1^{\tilde{h}}$, $x^{\tilde{h}_r}(\theta_1) = \lambda_2^{\tilde{h}}, ...,$ $x^{\tilde{h}_r}(\theta_m) = \lambda_{m+1}^{\tilde{h}}$. Приближенные значения решения в остальных точках подинтервалов определяются решениями задач Коши

$$\frac{dx}{dt} = A_0(t)x + \sum_{j=1}^{m} A_j(t)\lambda_{j+1}^{\tilde{h}} + f(t), \quad t \in [\theta_{r-1}, \theta_r), \tag{14}$$

$$x(\theta_{r-1}) = \lambda_r^{\tilde{h}}, \quad r = \overline{1,m+1}. \tag{15}$$

Используя метод Рунге-Кутта 4-го порядка точности, при решении задач Коши (14), (15) находим численное решение задачи (1), (2).

В качестве иллюстрации вышеизложенного алгоритма рассмотрим следующий пример.

Пример. На $[0, T]$ рассмотрим линейную краевую задачу для системы нагруженных дифференциальных уравнений с многоточечным интегральным условием

$$\frac{dx}{dt} = A_0(t)x + A_1(t)x(\theta_1) + f(t), \quad t \in (0, T), \tag{16}$$

$$B_0 x(0) + D_0 x(\theta_1) + C_0 x(T) + \int_0^T M(t)x(t)dt = d, \quad d \in R^2, \quad x \in R^2, \tag{17}$$

где $T = 1$, $\theta_1 = 1/2$, $A_0 = \begin{pmatrix} t & 1 \\ 0 & t \end{pmatrix}$, $A_1(t) = \begin{pmatrix} 0 & t \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $f(t) = \begin{pmatrix} -2t^2 - \frac{5}{4}t + 1 \\ -t^3 + 2t - \frac{3}{2} \end{pmatrix}$, $B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$D_0 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $C_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $M(t) = \begin{pmatrix} 2t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $d = \begin{pmatrix} 11/3 \\ 1/12 \end{pmatrix}$.

Отрезок $[0, 1]$ делим на две части: $[0, 1) = \left[0, \frac{1}{2}\right) \cup \left[\frac{1}{2}, 1\right)$, вводя дополнительные параметры $\lambda_1 = x(0)$, $\lambda_2 = x_2\left(\frac{1}{4}\right)$, переходим к эквивалентной краевой задаче с параметрами

$$\frac{dx}{dt} = A_0(t)(u_r + \lambda_r) + A_1(t)\lambda_2 + f(t), \quad t \in [\theta_{r-1}, \theta_r),$$

$$u_r(\theta_{r-1}) = 0, \quad r = \overline{1,2},$$

$$B_0\lambda_1 + D_0\lambda_2 + C_0\lambda_2 + C_0 \lim_{t \to T-0} u_2(t) + \sum_{k=1}^{2} \int_{\theta_{k-1}}^{\theta_k} M(t)[u_k(t) + \lambda_k]dt = d,$$

$$\lambda_1 + \lim_{t \to \theta_1 - 0} u_1(t) = \lambda_2.$$

Решаем ниже приведенные задачи Коши методом Рунге-Кутта 4-го порядка точности. Число разбиений на подинтервалах $\left[0, \frac{1}{2}\right), \left[\frac{1}{2}, 1\right)$ возьмем равным $N_1 = N_2 = 10$ с шагом $h_1 = h_2 = 0.05$.

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + f(t), \ t \in \left[0, \frac{1}{2}\right), \ X(0) = 0, \qquad \frac{dX}{dt} = A(t)X + f(t), \ t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right), \ X\left(\frac{1}{2}\right) = 0.$$

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + A(t), \ t \in \left[0, \frac{1}{2}\right), \ X(0) = 0, \qquad \frac{dX}{dt} = A(t)X + K(t),$$

$t \in \left[0, \frac{1}{2}\right), \ X(0) = 0,$

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + A(t) + K(t), \qquad t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right), \ X\left(\frac{1}{2}\right) = 0,$$

Далее строим матрицу $Q^{\tilde{h}}(\theta)$ и вектор $F^{\tilde{h}}(\theta)$:

$$Q^{\tilde{h}}(\theta) = \begin{pmatrix} 1.266297056477 & 0.089872191155 & 1.351741698858 & -0.739617989185 \\ 0 & 1.521638475534 & -0.346816628412 & 2.139210895054 \\ 1.133148452767 & 0.566574223693 & -0.86123518744 & 0.133148452767 \\ 0 & 1.133148452767 & 0.543826507092 & -1 \end{pmatrix},$$

$$F^{\tilde{h}}(\theta) = \begin{pmatrix} -3.109005058668 \\ -0.014577794616 \\ 0.125417270131 \\ -0.565739745675 \end{pmatrix}.$$

И решая систему уравнений (13) получаем численные значения параметров

$$\lambda_1^{\tilde{h}} = \begin{pmatrix} 0.999999959889 \\ -0.000000006487 \end{pmatrix}, \ \lambda_2^{\tilde{h}} = \begin{pmatrix} 1.500000008642 \\ 0.250000012312 \end{pmatrix}.$$

Численные решения в остальных точках подинтервалов найдем вновь используя метод Рунге-Кутта 4-го порядка точности к следующим задачам Коши

$$\frac{dx_1}{dt} = A(t)x_1 + K(t)\lambda_2^{\tilde{h}} + f(t), \quad t \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \quad x_1(0) = \lambda_1^{\tilde{h}},$$

$$\frac{dx_2}{dt} = A(t)x_2 + K(t)\lambda_2^{\tilde{h}} + f(t), \quad t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \quad x_2\left(\frac{1}{2}\right) = \lambda_2^{\tilde{h}}.$$

Решением задачи (16), (17) является вектор $x^*(t)$ с координатами $x_1^*(t) = t + 1$, $x_2^*(t) = t^2$.

Результаты вычислений, разности численного и точного решений в дискретных точках представлены в таблице

t	$\widetilde{x}_1(t)$	$x_1^*(t)$	$\widetilde{x}_2(t)$	$x_2^*(t)$
0	0.999999959889	1	-0.000000006487	0
0.05	1.049999966030	1.05	0.002499994100	0.0025
0.1	1.099999972040	1.1	0.009999994996	0.01
0.15	1.149999977865	1.15	0.022499996196	0.0225
0.2	1.199999983453	1.2	0.039999997696	0.04
0.25	1.249999988748	1.25	0.062499999487	0.0625
0.3	1.299999993691	1.3	0.090000001558	0.09
0.35	1.349999998222	1.35	0.122500003895	0.1225
0.4	1.400000002272	1.4	0.160000006480	0.16
0.45	1.450000005771	1.45	0.202500009294	0.2025
0.5	1.500000008642	1.5	0.250000012312	0.25
0.55	1.550000010799	1.55	0.302500015509	0.3025
0.6	1.600000012147	1.6	0.360000018851	0.36
0.65	1.650000012585	1.65	0.422500022305	0.4225
0.7	1.700000011996	1.7	0.490000025828	0.49
0.75	1.750000010252	1.75	0.562500029375	0.5625
0.8	1.800000007208	1.8	0.640000032894	0.64
0.85	1.850000002704	1.85	0.722500036325	0.7225
0.9	1.899999996556	1.9	0.810000039602	0.81
0.95	1.949999988558	1.95	0.902500042649	0.9025
1	1.999999978478	2	1.000000045381	1

Справедлива оценка $\max\limits_{j=1,20}\left\|x^*\left(t_j\right)-\widetilde{x}\left(t_j\right)\right\| < 0.4\cdot 10^{-7}$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. -М: Высшая школа, 1995. - 205 с.

[2] Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. - 4-е изд. -М.: Наука. - 1974. - 331 с.

[3] Пулькина Л.С. Нелокальная задача с интегральными условиями для квазилинейного гиперболического уравнения // Математические заметки. - 2001. - Т. 70. -№1. -С. 88-95.

[4] Aida-zade K.R., Abdullaev V.M. On Numerical Solution to Loaded Systems of Ordinary Differential Equations with Non-separated Multipoint and Integral Conditions // Numerical Analysis and Applications. - 2014. - Vol. 17. -№ 1. - P. 1-16.

[5] Нахушев А.М. Краевые задачи для нагруженных интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа и некоторые их приложения к прогнозу почвенной влаги // Дифференц. Уравнения. - 1979. - Т. 15. -№ 1. - С. 96-105.

[6] Нахушев А.М. Об одном приближенном методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений и его приложения к динамике почвенной влаги грунтовых вод // Дифференц. Уравнения, 1982. - Т. 18. -№ 1. - С. 72-81.

[7] Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их применение. -М.: Наука, 2012. -232 с.

[8] Абдуллаев В.М., Айда-заде К.Р. О численном решении нагруженных дифференциальных уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. - 2004. - Т. 44. -№ 9. - С. 1585-1595.

[9] Абдуллаев В.М., Айда-заде К.Р. О численном решении задач оптимального управления с неразделенными многоточечными и интегральными условиями // Ж. вычисл. матем. и математической физики. - 2012. - Т.52. -№12. - С. 2163-2177.

[10] Абдуллаев В.М., Айда-заде К.Р. Численный метод решения нагруженных нелокальных граничных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. - 2014. - Т.54. -№7. -С. 1096-1109.

[11] Бакирова Э.А. О признаке однозначной разрешимости двухточечной краевой задачи для системы нагруженных дифференциальных уравнений // Известия НАН РК. Сер. физ-матем. - 2005. - №1. -С. 95-102.

[12] Бакирова Э.А. О необходимых и достаточных условиях однозначной разрешимости двухточечной краевой задачи для нагруженных дифференциальных уравнений // Математический журнал. - 2005. -Т. 5. -№ 3. - С. 25-34.

[13] Кадирбаева Ж.М. Об однозначной и корректной разрешимости линейной двухточечной краевой задачи для нагруженных дифференциальных уравнений // Матем. журнал МОН РК. - 2009. - Т. 9. -№ 4. - С. 63-71.

[14] Akzhigitov E.A., Kadirbayeva Zh.M. On a solvability of two-point boundary value problem for loaded differential equations // Science review. S.Seifullin Kazakh Agro Technical University. - 2012. - № 2(10). –С. 35-40.
[15] Джумабаев Д.С., Илиясова Г.Б. Об одной численной реализации метода параметризации решения линейной краевой задачи для нагруженного дифференциального уравнений // Известия НАН РК. Серия физико-математическая. - 2014. - № 2. –С. 275-280.
[16] Джумабаев Д.С. Признаки однозначной разрешимости линейной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. - 1989. - Т.29. -№1. -С. 50-66.
[17] Джумабаев Д.С., Иманчиев А.Е. Корректная разрешимость линейной многоточечной краевой задачи // Математический журнал. - 2005. - Т.5. -№1. - С. 30-38.

Қадырбаева Ж.М., Көжебаева А.С.

Көпнүктелі интегралдық шарты бар жүктелген дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін сызықты шеттік есептің сандық шешілуі туралы

Түйіндеме. Көпнүктелі интегралдық шарты бар жүктелген дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін сызықты шеттік есеп қарастырылады. Қарастырылып отырған есепті шешу үшін параметрлеу әдісі қолданылады. Көпнүктелі интегралдық шарты бар жүктелген дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін сызықты шеттік есеп жүктелу нүктелерінде қосымша параметрлер енгізу арқылы параметрлі эквивалентті шеттік есепке келтіріледі. Параметрлі эквивалентті шеттік есеп параметрлі жәй дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін Коши шеттік есебінен, көпнүктелі интегралдық шартынан және үзіліссіздік шартынан тұрады. Параметрлі жәй дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін Коши шеттік есебінің шешімі дифференциалдық теңдеудің фундаменталдық матрицасының көмегімен тұрғызылады. Тұрғызылған шешімнің сәйкес нүктелерінде мәндерді көпнүктелі интегралдық шартқа және үзіліссіздік шартына қоя отырып, параметрлерге қарасты сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесі құрылады. Қарастырылып отырған есепті шешудің құрылған жүйені және ішкі аралықтарда Коши есебін 4-ретті Рунге-Кутт әдісін қолданып шешуге негізделген сандық әдісі ұсынылады.

Негізгі сөздер: шеттік есеп, параметрлеу әдісі, жүктелген дифференциалдық теңдеу, интегралдық шарт.

Kadirbayeva Zh.M., Kozhebayeva A.S.

On the numerical solving of a linear boundary value problem for the system of loaded differential equations with multipoint integral condition

Summary. A linear boundary value problem for the system of loaded differential equations with multipoint integral condition is considered. The method of parameterization is used for solving the considering problem. The linear boundary value problem for the system of loaded differential equations with multipoint integral condition by introducing additional parameters at the loading points is reduced to an equivalent boundary value problem with parameters. The equivalent boundary value problem with parameters consist of the Cauchy problem for the system of ordinary differential equations with parameters, multipoint integral condition and continuity condition. The solution of the Cauchy problem for the system of ordinary differential equations with parameters is constructed using the fundamental matrix of the differential equation. The system of a linear algebraic equations with respect to the parameters are composed by substituting the values of the corresponding points in the built solutions to the multipoint integral condition and the continuity condition. Numerical method for solving of the problem is suggested, which based on the solving of the constructed system and method of Runge-Kutta 4-th order for solving of the Cauchy problem on the subintervals.

Key words: boundary value problem, parameterization method, loaded differential equation, integral condition.

УДК 621.424, 621.422

С.Н. Ахтанов, А.С. Амангелді , Қ.Қ. Бейсембаева, А.А. Құйқабаева
(әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан; zhanochka555@mail.ru)

ХАОСТЫ ГЕНЕРАТОРЛАРДЫҢ НЕГІЗІНДЕГІ ТАРАТҚЫШ-ҚАБЫЛДАҒЫШ

Аңдатпа. Қазіргі уақытта информациялық технологиядағы және техникалық құрылғыларды түрлендіруді жүзеге асырудағы, информацияны жіберу мен сақтаудағы телекоммуникациялық жүйелердегі жаңа зерттеулерде ғана емес, сондай-ақ қазіргі уақытқа дейін белгілі зерттелген тапсырмаларда, мысалыға информацияны сақтаудың жылдам даму қарқыны өсіп келеді. Зерттеудің актуалдығы информацияны қорғау болды және солай болып қалмақ. Бұл тапсырманың шешімі хаосты сигналдың қолданылуымен байланысты. Хаосты сигналдың қолданылуымен байланыс техникасы жеткіліксіз зерттелген және қазіргі уақытта дамып келеді. Кең жолақты хаосты тербелістердің байланыс жүйесініне қатысты жұмыстардың саны әрдайым