УДК 517

Б.Т. Жамыханов, Ф.М. Мамбетова, Ж. Болатовна,
(КазГосЖенПУ, Алматы Республика Казахстан)

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА, СВЯЗАННАЯ С СИНГУЛЯРНОСТЬЮ

Рассмотрим уравнение

$$\varepsilon x'' + 4x' + 8x = e^{-t} \tag{1.1}$$

с краевыми условиями

$$x(0,\varepsilon) = 2, \qquad x'(0,\varepsilon) = 1 \tag{1.2}$$

Исследуем решение задачи (1.1), (1.2) при $\varepsilon \to 0$.

РЕШЕНИЕ:

Рассмотрим однородное линейное дифференциальное уравнение, соответствующее данному:

$$\varepsilon x'' + 4x' + 8x = 0 \tag{1.3}$$

Составим характеристическое уравнение:

$$\varepsilon \cdot \lambda^2 + 4 \cdot \lambda + 8 = 0,$$

$$D = 16 - 32 \cdot \varepsilon \succ 0,$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 32\varepsilon}}{2 \cdot \varepsilon} = \frac{2}{\varepsilon} \cdot \left(-1 \pm \sqrt{1 - 2\varepsilon}\right),$$

$$\lambda_1 = \frac{2}{\varepsilon} \cdot \left(-1 - \sqrt{1 - 2\varepsilon}\right), \lambda_2 = \frac{2}{\varepsilon} \cdot \left(-1 + \sqrt{1 - 2\varepsilon}\right),$$

$$e^{\lambda_1 \cdot t}, e^{\lambda_2 \cdot t} - фундаментальнаясистемарешениiоднородногоуравнения (1.3)$$

Частное решение уравнения (1.1) будем искать в виде:

$$\bar{x} = Ae^{-t}, \bar{x}' = -Ae^{-t}, \bar{x}'' = Ae^{-t}.$$

Подставляя эти значения в уравнение (1.1), получим:

$$A = \frac{1}{4 + \varepsilon} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 + \varepsilon/4} = \frac{1}{4} \cdot \left(1 - \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon^2}{16} - \frac{\varepsilon^3}{64} + \ldots\right).$$

Общее решение уравнения (1.1) будет иметь вид:

$$x(t,\varepsilon) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + c_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot t} + \frac{e^{-t}}{\varepsilon + 4},$$

$$x'(t,\varepsilon) = \lambda_1 c_1 e^{\lambda_1 \cdot t} + \lambda_2 c_2 e^{\lambda_2 \cdot t} - \frac{e^{-t}}{\varepsilon + 4}.$$

Учитывая начальные условия (1.2), получим:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + \dfrac{1}{\varepsilon + 4} = 2, \\ \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 - \dfrac{1}{\varepsilon + 4} = 1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = \dfrac{2\varepsilon + 7}{\varepsilon + 4}, \\ \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 = \dfrac{\varepsilon + 5}{\varepsilon + 4}. \end{cases}$$

Найдем коэффициенты c_1 и c_2:

$$c_1 = \frac{D_1}{D}, c_2 = \frac{D_2}{D}:$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{vmatrix} = \lambda_2 - \lambda_1 = \frac{4}{\varepsilon} \cdot \sqrt{1 - 2 \cdot \varepsilon}, D_1 = \begin{vmatrix} \frac{2\varepsilon + 7}{\varepsilon + 4} & 1 \\ \frac{\varepsilon + 5}{\varepsilon + 4} & \lambda_2 \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{1 - 2\varepsilon} \cdot (4\varepsilon + 14) - (\varepsilon^2 + 9\varepsilon + 14)}{\varepsilon(\varepsilon + 4)},$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & \frac{2\varepsilon + 7}{\varepsilon + 4} \\ \lambda_1 & \frac{\varepsilon + 5}{\varepsilon + 4} \end{vmatrix} = \frac{\varepsilon + 5}{\varepsilon + 4} - \frac{2\varepsilon + 7}{\varepsilon + 4} \cdot \lambda_1 = \frac{(4 \cdot \varepsilon + 14) \cdot \sqrt{1 - 2\varepsilon} + (\varepsilon^2 + 9\varepsilon + 14)}{\varepsilon(\varepsilon + 4)}.$$

$$c_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{1}{4(\varepsilon + 4)} \cdot \left[4 \cdot \varepsilon + 14 - (\varepsilon^2 + 9\varepsilon + 14) \cdot (1 - 2\varepsilon)^{-1/2}\right],$$

$$c_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{1}{4(\varepsilon + 4)} \cdot \left[4\varepsilon + 14 + (\varepsilon^2 + 9\varepsilon + 14) \cdot (1 - 2\varepsilon)^{-1/2}\right].$$

Общее решение уравнения (1.1) принимает вид:

$$x(t, \varepsilon) = \frac{1}{4(\varepsilon + 4)} \cdot \left[4\varepsilon + 14 - (\varepsilon^2 + 9\varepsilon + 14) \cdot (1 - 2\varepsilon)^{-1/2}\right] \cdot e^{(-2/\varepsilon) \cdot (1 + \sqrt{1 - 2\varepsilon}) t} +$$

$$+ \frac{1}{4(\varepsilon + 4)} \cdot \left[4\varepsilon + 14 + (\varepsilon^2 + 9\varepsilon + 14) \cdot (1 - 2\varepsilon)^{-1/2}\right] \cdot e^{\frac{2}{\varepsilon} \cdot (-1 + \sqrt{1 - 2\varepsilon}) t} + \frac{e^{-t}}{\varepsilon + 4}.$$

Используя разложения функций

$(1 - 2\varepsilon)^{1/2}, (1 - 2\varepsilon)^{-1/2}$ в ряд Тейлора

$$(1 - 2\varepsilon)^{\frac{1}{2}} = 1 - \varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon^2 - \frac{1}{2}\varepsilon^3 - \ldots$$

$$(1 - 2\varepsilon)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \varepsilon + \frac{3}{2}\varepsilon^2 + \frac{5}{2} \cdot \varepsilon^3 + \ldots,$$

получим:

$$c_1 = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{\varepsilon}{16} + \frac{\varepsilon^2}{64} - \frac{\varepsilon^3}{256} + \ldots\right) \cdot \left[4\varepsilon + 14 - (\varepsilon^2 + 9\varepsilon + 14) \cdot \left(1 + \varepsilon + \frac{3}{2\varepsilon^2} + \frac{5}{2}\varepsilon^3 + \ldots\right)\right] -$$

$$- \frac{19}{16} \cdot \varepsilon - \frac{105}{64} \cdot \varepsilon - \frac{105}{64} \cdot \varepsilon^2 - \frac{687}{256} \cdot \varepsilon^3 - \ldots,$$

$$c_2 = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{\varepsilon}{16} + \frac{\varepsilon^2}{64} - \frac{\varepsilon^3}{256} + \ldots\right) \cdot \left[4\varepsilon + 14 + (\varepsilon^2 + 9\varepsilon + 14) \cdot (1 + \varepsilon + 3/2\,\varepsilon^2 + 5/2\,\varepsilon^3 + \ldots)\right] =$$

$$= \frac{7}{4} + \frac{5}{4}\varepsilon + \frac{13}{8}\varepsilon^2 + \frac{1571}{32} \cdot \varepsilon^3 + \ldots,$$

$$e^{\frac{2}{\varepsilon} \cdot (-1 + \sqrt{1 - 2\varepsilon}) t} = e^{-2t} \cdot \left(1 - \varepsilon t - \varepsilon^2 t + \frac{\varepsilon^2 \cdot t^2}{2} + \ldots\right),$$

$$e^{\frac{2}{\varepsilon} \cdot (-1 - \sqrt{1 - 2\varepsilon}) t} = e^{2t} \cdot e^{-\frac{4t}{\varepsilon}} \cdot \left(1 + \varepsilon t + \varepsilon^2 t + \frac{\varepsilon^2 \cdot t^2}{2} + \ldots\right).$$

Учитывая эти разложения, запишем общее решение уравнения (1.1) в следующем виде:

$$x(t,\varepsilon)=e^{2t}\cdot e^{-\frac{4t}{\varepsilon}}\cdot\left(-\frac{19}{16}\cdot\varepsilon-\frac{105}{64}\varepsilon^2-\frac{687}{256}\cdot\varepsilon^3-\frac{19}{16}\cdot\varepsilon^2 t-\frac{181}{64}\cdot\varepsilon^3 t-\frac{19}{32}\cdot\varepsilon^3\cdot t^2+...\right)+$$
$$+e^{-2t}\cdot\left(\frac{7}{4}+\frac{5}{4}\varepsilon+\frac{13}{8}\varepsilon^2+\frac{1571}{32}\varepsilon^3-\frac{7}{4}\varepsilon t-3\varepsilon^2 t+\frac{7}{8}\varepsilon^2 t^2-\frac{23}{8}\varepsilon^3 t+\frac{5}{8}\varepsilon^3 t^2+...\right)+$$
$$+e^{-t}\cdot\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{16}\cdot\varepsilon+\frac{1}{64}\cdot\varepsilon^2-\frac{1}{256}\cdot\varepsilon^3+...\right).$$

Запишем это решение в виде:

$x(t,\varepsilon)=x(t)+\varepsilon\cdot\varpi(\tau),\tau={}^{t}\!/\!_{\varepsilon}$

где $x_\varepsilon(t)=x_0(t)+\varepsilon x_1(t)+\ldots$.

$\varpi_\varepsilon(\tau)=\varpi_0(\tau)+\varepsilon\varpi_1(\tau)+\ldots$.

Разлагая функцию $e^{2t}=e^{2\tau\varepsilon}$ в ряд Тейлора

$$e^{2\tau\varepsilon}=1+2\varepsilon\tau+\frac{(2\varepsilon\tau)^2}{2}+\frac{(2\varepsilon\tau)^3}{2\cdot 3}+...,$$

получим:

$$x(t,\varepsilon)=\left[\frac{7}{4}\cdot e^{-2t}+\frac{1}{4}\cdot e^{-t}\right]+\varepsilon\cdot\left[\frac{5}{4}e^{-2t}-\frac{7}{4}te^{-2t}-\frac{1}{16}e^{-t}\right]+\varepsilon^2\left[\frac{13}{8}e^{-2t}-3te^{-2t}+{}^{7}\!/\!_{8}\,t^2e^{-2t}+\frac{1}{64}e^{-t}\right]+$$
$$+e^{-4\tau}\cdot\varepsilon\left[-\frac{19}{16}+\varepsilon\left(-\frac{105}{64}-\frac{19}{8}\cdot\tau\right)+\varepsilon^2\cdot\left(-\frac{687}{256}-\frac{143}{32}\cdot\tau-\frac{19}{8}\cdot\tau^2\right)\right]+....$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим последовательность уравнений для определения коэффициентов разложений:

$$\varepsilon^0: x_0(t)={}^{7}\!/\!_{4}e^{-2t}+\frac{1}{4}e^{-t};\omega_0(\tau)=-\frac{19}{16}e^{-4\tau};$$

$$\varepsilon^1: x_1(t)={}^{5}\!/\!_{4}\cdot e^{-2t}-{}^{7}\!/\!_{4}t\cdot e^{-2t}-\frac{1}{16}\cdot e^{-t};\omega_1(\tau)=\left(-\frac{105}{64}-\frac{19}{8}\cdot\tau\right)\cdot e^{-4\tau};$$

$$\varepsilon^2: x_2(t)=\frac{13}{8}\cdot e^{-2t}-3te^{-2t}+{}^{7}\!/\!_{8}t^2\cdot e^{-2t}+\frac{1}{64}\cdot e^{-t};$$

$$\omega_2(\tau)=\left(-\frac{687}{256}-\frac{143}{32}\cdot\tau-\frac{19}{8}\cdot\tau^2\right)\cdot e^{-4\cdot\tau}.$$

Решение состоит из двух частей: первая часть зависит от переменной t, а вторая – от переменной $\tau={}^{t}\!/\!_{\varepsilon}$. Вторую часть решения называют *пограничными функциями.*

Проверим следующие предельные равенства:

$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}x(t,\varepsilon)=x_0(t),0\le t\le 1$

$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}x'(t,\varepsilon)=x_0'(t),0\prec t_0\le t\le 1$

или $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}x(t,\varepsilon)=\dfrac{7}{4}e^{-2t}+\dfrac{1}{4}\cdot e^{-t}$,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} x'(t,\varepsilon) = -\frac{7}{2}\cdot e^{-2t} - \frac{1}{4}e^{-t}.$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{4(\varepsilon+4)}\left\{\begin{array}{l}\left[4\varepsilon+14-\left(\varepsilon^2+9\varepsilon+14\right)\cdot(1-2\varepsilon)^{-1/2}\right]\cdot e^{\left(-2/\varepsilon\right)\cdot\left(1+\sqrt{1-2\varepsilon}\right)t}+\\+\left[4\varepsilon+14+\left(\varepsilon^2+9\varepsilon+14\right)\cdot(1-2\varepsilon)^{-1/2}\right]\cdot e^{\frac{2}{3}\cdot\left(-1+\sqrt{1-2\varepsilon}\right)t}+4\cdot e^{-t}\end{array}\right\}=$$

$$=\frac{1}{16}\cdot\left(28e^{-2t}+4e^{-t}\right)=\frac{7}{4}\cdot e^{-2t}+\frac{1}{4}e^{-t};$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{4(\varepsilon+4)}\cdot\left\{\left[4\varepsilon+14-\left(\varepsilon^2+9\varepsilon+14\right)\cdot(1-2\varepsilon)^{-1/2}\right]\cdot\left(-2/\varepsilon\right)\cdot\left(1+\sqrt{1-2\varepsilon}\right)\cdot e^{\left(-2/\varepsilon\right)\cdot\left(1+\sqrt{1-2\varepsilon}\right)t}+\right.$$

$$\left.+\left[4\varepsilon+14+\left(\varepsilon^2+9\varepsilon+14\right)\cdot(1-2\varepsilon)^{-1/2}\right]\cdot\frac{2}{\varepsilon}\left(-1+\sqrt{1-2\varepsilon}\right)\cdot e^{\frac{2}{\varepsilon}\cdot\left(-1+\sqrt{1-2\cdot\varepsilon}\right)t}-4\cdot e^{-t}\right\}=$$

$$=\frac{1}{16}\cdot\left(-56\cdot e^{-2t}-4e^{-t}\right)=-\frac{7}{2}e^{-2t}-\frac{1}{4}e^{-t}.$$

Таким образом, решение возмущенной задачи стремится к решению невозмущенной задачи.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. – М.: Наука. 1981. – 400с.

[2] Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. Москва, 1990. – 208с.

[3] Найфэ А. Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. – 535с.

[4] Касымов К.А. Линейные сингулярно возмущенные дифференциальные уравнения второго порядка. Алма-Ата, 1982. – 111с.

Жамыханов Б.Т., Мамбетова Ф.М., Болатқызы Ж.

Сингулярлық ұғыммен байланысты шекаралық есеп

Түіндеме. Бұл мақалада жоғарғы ретті туындысының коэффициенті кішкентай параметрден тәуелді екінші ретті біртекті теңдеу үшін асимптотикалық жіктеу әдісінің колданысы қарастырылады.

Тірек сөз: кіші (кішкентай) параметр, сингулярлық.

Zhamykhanov B.T., Mambetova F.M., Bolatova Z.,

A singular boundary value problem

Summary. In this paper, the inhomogeneous second-order differential equation with a small parameter multiplies the highest derivative by using asymptotic expansion is examined. The solution consists of two parts: the first part depends on the variable **t**, the second one – on the variable **τ = t/ε**. The second part of the solution is called **boundary functions**. The solution of the perturbed problem tends to the solution of the unperturbed problem is shown.

Key words: small parameter, singular, perturbation, the highest power.

УДК 372.8:51

Хамытхожаева Д.Д., Баймұханов Б.

(Қазақ мемлекеттік қыздар педагогикалық университеті,
Қазақстан Республикасы)

ЛОГИКАЛЫҚ МӘДЕНИЕТ ОҚУШЫЛАРДЫҢ МАТЕМАТИКАЛЫҚ БІЛІМІНІҢ НЕГІЗГІ ЭЛЕМЕНТІ

Аннотация: Математиканы оқыту әдістемесіне байланысты зерттеулерде логикалық ойлауды дамытудың қажеттігі айтылған. Бұл проблеманы А. Я. Хинчин дәл айқындаған. Ол осы проблеманы сипаттайтын мәселелер жиынтығын анықтаған. Математиканы оқыту әдістемесінде ол бірнеше мақсаттарды ең маңызды деп бөліп қарастырған. Оларға ол логикалық мәдениеттілікті қалыптастыруды жатқызған. Оның пікірінше әдетте оған көп назар аударып, бірақта көпшілік жағдайда жаттанды, үстірт және жеткіліксіз жекелендіріілмей, келтірілетін мысалдар дағдыдағы жағдайлармен келіспейтін жағдайларда өте тиімсіз